

Cezary Rzymkowski

Politechnika Warszawska, Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa

WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI

T7. Metody i narzędzia rejestracji ruchu ciała człowieka w biomechanice sportu, ergonomii i rehabilitacji

Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Na podstawie:

David A. Winter,
Biomechanics and motor control of human movement, 4th ed.,
John Wiley & Sons, Inc., 2009



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI

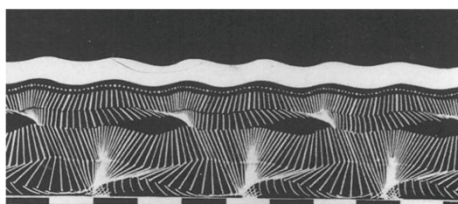
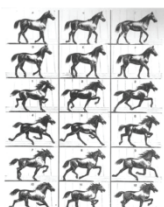
Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



WPROWADZENIE

- ❖ Główną metodą rejestracji ruchu ciała człowieka w biomechanice, pozostaje od lat metoda kinematograficzna.
- ❖ Za pionierów wykorzystania tej metody można uznać dziewiętnastowiecznych badaczy, takich jak: E. J. Muybridge, E.-J. Marey oraz Ch.W. Braune i O. Fisher.



- ❖ Tych dwóch ostatnich, można uznać za prekursorów wykorzystania rejestracji ruchu metodą kinematograficzną jako podstawy do rozwiązania odwrotnego zadania dynamiki (wyznaczenia sił i momentów sił) występujących w układzie mięśniowo-szkieletowym człowieka podczas ruchu.



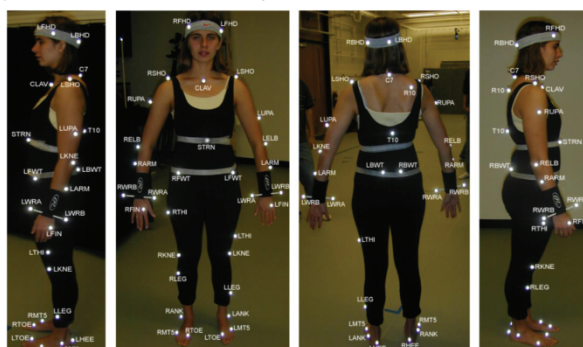
WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI

Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie



WPROWADZENIE

- ❖ Do zalet metody kinematograficznej zaliczyć można bardzo dobrą dokładność uzyskiwanych wyników oraz praktycznie bezdotykowy charakter zapewniający minimalizację wpływu pomiarów na realizację ruchu (w większości przypadków wykorzystywany jest zestaw markerów mocowanych do ciała, co jednak w znaczący sposób nie zakłóca ruchu).



Źródło: <http://mocap.cs.cmu.edu/markerPlacementGuide.pdf>



WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI

Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie



WPROWADZENIE

- ❖ Od lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku, pierwotnie wykorzystywane kamery analogowe (rejestrujące obraz na taśmie filmowej) zastępowane są kamerami cyfrowymi (od około ćwierćwiecza, praktycznie całkowicie), często zsynchronizowanymi z oświetleniem emitującym światło z zakresu podczerwieni, co pozwala na prowadzenie pomiarów bez zakłóceń, w normalnych warunkach oświetleniowych.



- ❖ Wraz z rozwojem systemów komputerowych znacznie ułatwiło to korzystanie z metod kinematograficznych, które stały się z narzędzia wykorzystywanego głównie do badań naukowych narzędziem wykorzystywanym na co dzień w wielu dziedzinach (np. w zastosowaniach medycznych czy ergonomii).



WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI

Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie



WPROWADZENIE

- ❖ Wraz z rozwojem elektroniki, pojawiła się możliwość miniaturyzacji i integracji różnorodnych czujników pomiarowych, a także łatwego przesyłania i gromadzenia rejestrowanych przez nie sygnałów.
- ❖ Pozwoliło to na wykorzystanie tych nowych możliwości również na potrzeby rejestracji ruchu ciała człowieka.
- ❖ Zwykle wykorzystywane są tzw. czujniki 9-D+, które w jednej miniaturowej obudowie mieszczą 3 czujniki trójosiowe: akcelerometr liniowy, żyroskop i magnetometr, +ewentualnie również GPS oraz niezbędny układ wzmacniacza, filtry i często moduły do bezprzewodowej transmisji danych. Typowe, komercyjne rozwiązania przedstawiono na rysunkach (możliwa jest dalsza miniaturyzacja).



Źródło: <https://www.xsens.com>



WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI

Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie



WPROWADZENIE

- ❖ Aby zarejestrowane położenia markerów lub sygnały z czujników 9-D+ mogły być przydatne w analizach biomechanicznych konieczne jest ich odpowiednie opracowanie/przetworzenie.
- ❖ Oczywiście komercyjne systemy dostarczane są z odpowiednim oprogramowaniem i większość użytkowników w zastosowaniach rutynowych (np. na potrzeby oceny postępów procesu rehabilitacji) może z nich korzystać nie mając „zielonego pojęcia” o sposobie przetwarzania rejestrowanych danych.



- ❖ Ponieważ jednak wykład ten przeznaczony jest dla Studentów wydziałów mechanicznych politechnik, na dalszych slajdach przedstawiono nieco informacji podstawowych.



WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI

Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie



UKŁADY WSPÓŁRZĘDNYCH

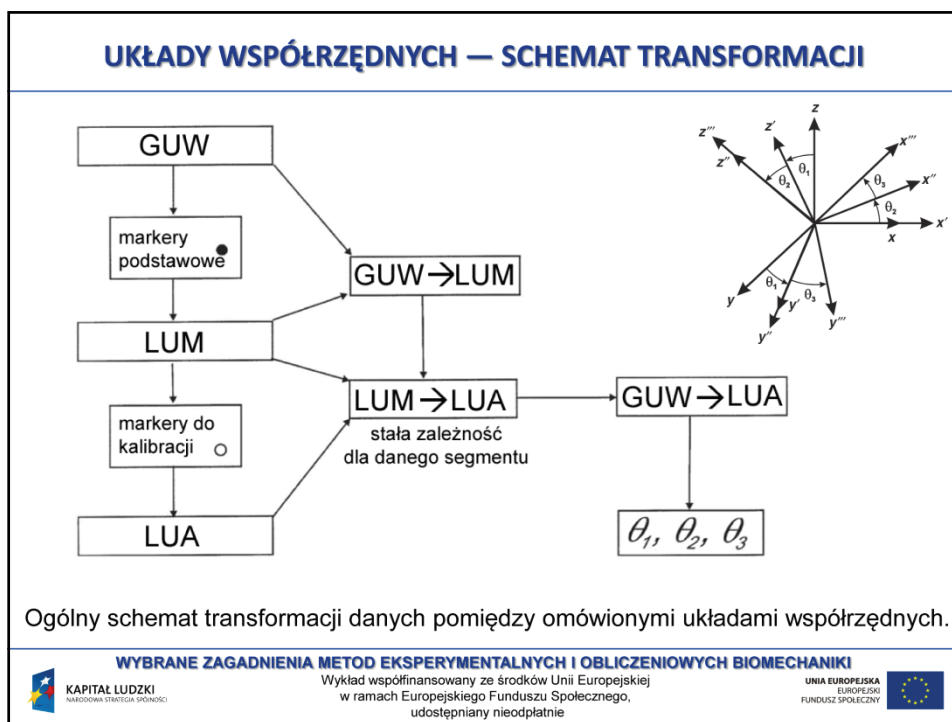
- ❖ Pierwszym zadaniem w analizie ruchu jest ustalenie układu(ów) współrzędnych, względem którego(ych) ruch jest rozpatrywany.
- ❖ W przypadku badania ruchu człowieka przy wykorzystaniu metody kinematograficznej oprócz globalnego układu współrzędnych (GUW) istnieje potrzeba określenia co najmniej dwóch lokalnych układów współrzędnych związanych z każdym z segmentów, jakie wyróżnia się w przyjętym modelu ciała.
- ❖ Są to lokalne układy określone na podstawie konfiguracji markerów przytwierdzonych do danego segmentu (LUM) oraz tzw. układy anatomiczne (LUA), których położenie i orientacja osi wynikają z budowy anatomicznej segmentu.
- ❖ Między lokalnymi układami „markerów” LUM i „anatomicznym” LUA, w przypadku każdego z segmentów, istnieje ścisła relacja (są względem siebie nieruchome).
- ❖ Położenie układu „markerów” LUM (a wobec powyższego, również „anatomicznego” LUA) względem układu globalnego GUW zmienia się w trakcie ruchu.



WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI

Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie





UKŁADY WSPÓŁRZĘDNYCH

Globalny Układ Współrzędnych (GUW)

- ❖ Zwykle przyjmuje się następującą konwencję kierunków osi GUW:
oś X skierowana jest w kierunku przemieszczania się badanej osoby,
oś Y skierowana jest pionowo do góry (przeciwnie do kierunku przyspieszenia ziemskiego g), natomiast oś Z stanowi dopełnienie do układu prawoskrętnego.
- ❖ Stąd XZ jest płaszczyzną poziomą prostopadłą do osi Y .
- ❖ W przypadku jednoczesnego wykorzystywania do pomiarów sił reakcji podłoża platform dynamometrycznych dokonuje się odpowiedniej kalibracji i „spasowania” GUW dla pomiarów położenia markerów metodą kinematograficzną i układu współrzędnych, w którym wyrażane są wielkości składowych sił reakcji rejestrowanych przez platformę(y) dynamometryczną(e).
- ❖ W wielu pracowniach prowadzących badania rutynowe zarówno położenie początku GUW, jak też zwrot osi są ustalone i nie ma potrzeby dokonywania kalibracji przed kolejną serią pomiarów.

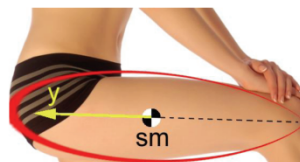
WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI

Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie

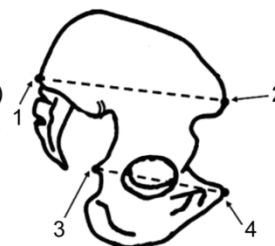
UKŁADY WSPÓŁRZĘDNYCH

UKłady lokalne, transformacja współrzędnych

- ❖ Dla każdego z rozważanych segmentów należy zdefiniować związany z nim lokalny układ anatomiczny (LUA).
- ❖ Jego początek umieszcza się w środku masy segmentu, natomiast oś Y skierowana jest wzdłuż jego osi długiej (zwrot w kierunku końca „bliższego” (proksymalnego)).



- ❖ W przypadku segmentów nieregularnych (np. miednicy) kierunek osi Y wyznaczany jest na podstawie położenia wybranych punktów charakterystycznych anatomicznie (np. dla miednicy: 1 – kołek biodrowy tylny górny, 2 – kołek biodrowy przedni górny, 3 – kołek kulszowy, 4 – spójnienie łonowe).



WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI

Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, udostępniany nieodpłatnie



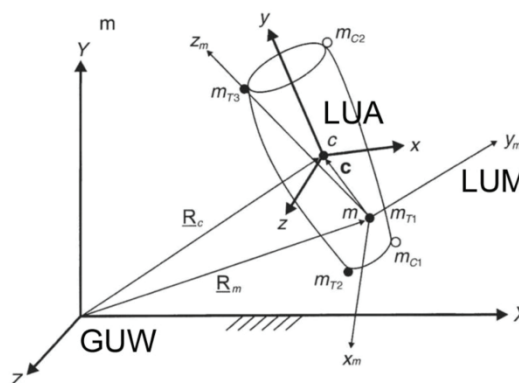
UKŁADY WSPÓŁRZĘDNYCH

UKłady lokalne, transformacja współrzędnych

- ❖ Drugi układ lokalny (układ „markerów” LUM: x_m, y_m, z_m), dla każdego z rozważanych segmentów, definiowany jest na podstawie nie mniej niż 3 markerów związanych z danym segmentem (na rysunku markery: m_{T1}, m_{T2}, m_{T3}).



Przykład dla podudzia



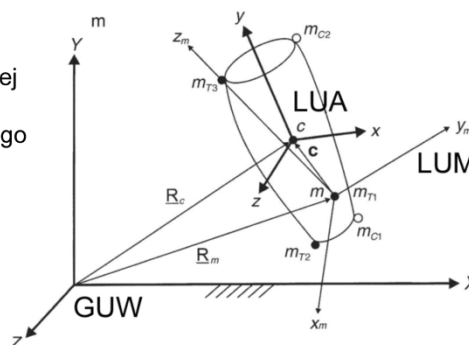
WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI

Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, udostępniany nieodpłatnie



UKŁADY WSPÓŁRZĘDNYCH

- ❖ Markery związane z każdym z segmentów nie mogą być kolinearne.
- ❖ Wyznaczają wtedy płaszczyznę, w której leżą osie o zwrotach takich, że wszystkie markery (m_{T1} , m_{T2} , m_{T3}) leżą w pierwszej ćwiartce układu $X_m Z_m$.
- ❖ Położenie jednego z markerów wybierane jest jako początek LUM (w pokazanym na rysunku przypadku: m_{T1} , oznaczony dalej jako m).
- ❖ Linia od m_{T1} do m_{T3} wyznacza dodatni kierunek osi z_m , oś y_m jest normalna do płaszczyzny wyznaczonej przez punkty: m_{T1} , m_{T2} , m_{T3} a x_m uzupełnia całość do ortogonalnego układu prawoskrętnego.



WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI

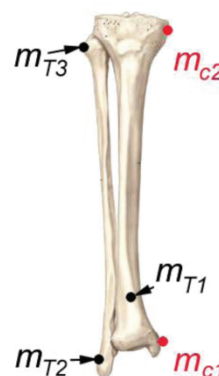


Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie



UKŁADY WSPÓŁRZĘDNYCH

- ❖ Zadaniem procesu kalibracji „anatomicznej” jest znalezienie relacji pomiędzy układem LUM o osiach: $x_m - y_m - z_m$ i układem LUA o osiach: $x - y - z$.
- ❖ Na potrzeby kalibracji dodaje się chwilowo dwa dodatkowe markery.
- ❖ Na przykład dla podudzia, gdy 3 podstawowe markery (m_{T1} , m_{T2} , m_{T3}) umieszczone są w charakterystycznych punktach pokazanych na rysunku kolorem czarnym, dwa dodatkowe markery (m_{C1} , m_{C2}) można umieścić na czas kalibracji w miejscach wskazanych kolorem czerwonym.
- ❖ Po umieszczeniu dodatkowych markerów dokonuje się krótkiej (wystarcza ok. 1 sekundy) rejestracji obrazu, dla badanego pozostającego w bezruchu, przy wykorzystaniu docelowego systemu kamer.



WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI

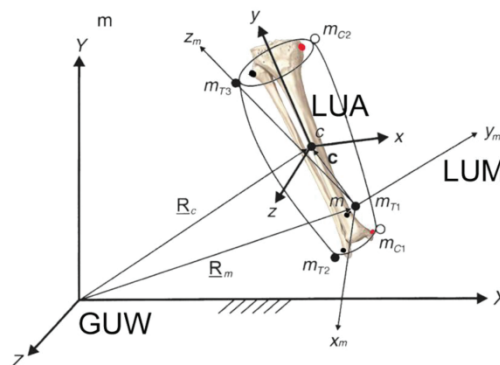


Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie



UKŁADY WSPÓŁRZĘDNYCH

- ❖ Przebieg osi y układu anatomicznego LUA wyznaczają teraz punkty będące środkiem odcinka wyznaczonego przez markery m_{T2} i m_{C1} oraz środkiem odcinka wyznaczonego przez markery m_{T3} i m_{C2} . Są to, odpowiednio, środki stawu skokowego i kolanowego.
- ❖ Oś x jest prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez oś y i odcinek m_{C1} do m_{T2} .
- ❖ Oś z jest normalną do płaszczyzny $x-y$, skierowaną tak, aby $x-y-z$ tworzyły układ prawoskrętny.



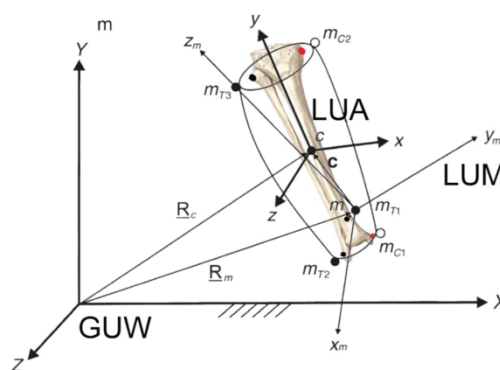
WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI

Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie



UKŁADY WSPÓŁRZĘDNYCH

- ❖ Przedstawione postępowanie doprowadza do określenia jednoznacznej relacji między układami LUM i LUA.
- ❖ Położenie środka masy można względem dystalnego lub proksymalnego końca rozważanego segmentu można znaleźć wykorzystując dane antropometryczne (np. odpowiednie tablice lub oprogramowanie).
- ❖ Stąd, wyznaczenie wektora \mathbf{c} i dalej położenia początku układu LUA w globalnym układzie współrzędnych GUW (wektor \mathbf{R}_c) jest również banalne.
- ❖ Po zakończeniu kalibracji, markery dodatkowe (m_{C1} , m_{C2}) są usuwane i można przystąpić do właściwych pomiarów.



WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI

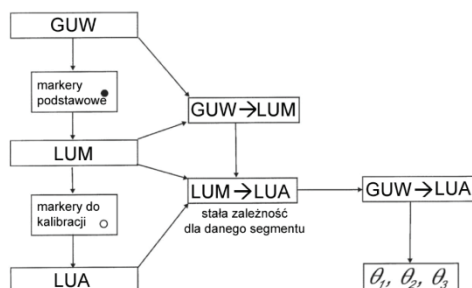
Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie



OBLICZENIA WIELKOŚCI KINEMATYCZNYCH

Położenia kątowe poszczególnych segmentów

- ❖ Na podstawie znajomości (w układzie globalnym GUW) położenia markerów (przetywierdzonych do poszczególnych segmentów) obliczonych na podstawie obrazów rejestrowanych przez prawidłowo wykalibrowany system kamer oraz wykorzystaniu opisanych wcześniej transformacji między układami GUW, LUM, LUA



łatwo można określić położenia kątowe segmentów względem układu GUW.

WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI



Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie



OBLICZENIA WIELKOŚCI KINEMATYCZNYCH

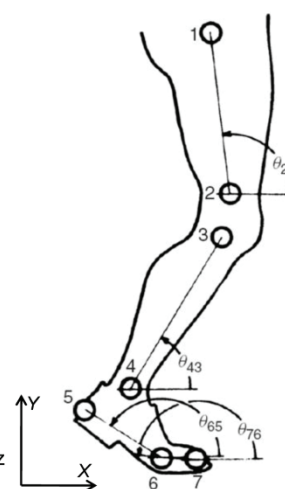
Położenia kątowe poszczególnych segmentów

- ❖ Na rysunku pokazano zarys nogi (przypadek 2-D) z 7 markerami umieszczonymi w punktach leżących na osiach długich poszczególnych segmentów, wyznaczających linie, które mogą być przyjęte do określenia położenia kąowego uda, podudzia i dwóch części stopy, względem poziomu.
- ❖ Zwyczajowo kąty odmierzane są między linią poziomą a półprostą rozpoczynającą się w punkcie dystalnym w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.
- ❖ I tak na przykład:

- położenie kątowe uda:

$$\theta_{21} = \arctg(y_1 - y_2, x_1 - x_2)$$

(dla zachowania ciągłości narastania kąta, przy przejściu przez $\pi/2$, wykorzystuje się dwuargumentową funkcję $\arctg(\Delta y, \Delta x)$)



WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI



Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie



OBLICZENIA WIELKOŚCI KINEMATYCZNYCH

Położenia kątowe poszczególnych segmentów /przemieszczenia kątowe w stawach

- ❖ W przypadku ogólnym, dla segmentu wyznaczonego punktem dystalnym j i proksymalnym i :

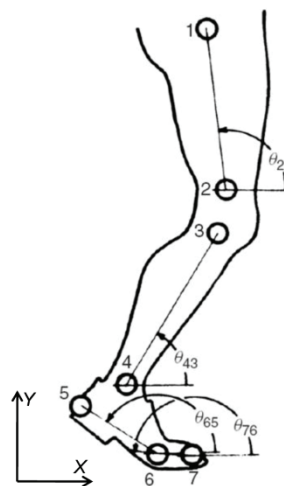
- położenie kątowe segmentu ji :

$$\theta_{ji} = \arctg(y_i - y_j, x_i - x_j)$$

- ❖ Mając wyznaczone położenia kątowe poszczególnych segmentów w GUW, można bez trudu znaleźć przemieszczenia kątowe w stawach, np.:

- dla stawu kolanowego: $\theta_k = \theta_{21} - \theta_{43}$

(narastanie kąta θ_k oznacza zginanie;
kąt θ_k maleje w czasie prostowania)



WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI

Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie



OBLICZENIA WIELKOŚCI KINEMATYCZNYCH

Przemieszczenia kątowe w stawach

- ❖ Konwencja przyjęta dla stawu kolanowego nie jest obowiązująca dla wszystkich stawów (stąd, rozpoczynając analizę przebiegów kątów w stawach, zwłaszcza na podstawie danych uzyskanych z obcych źródeł, należy upewnić się co do przyjętych zasad ustalania wartości i kierunków dla poszczególnych kątów).

- ❖ Na przykład, dla stawu skokowego, zwykle przyjmuje się:

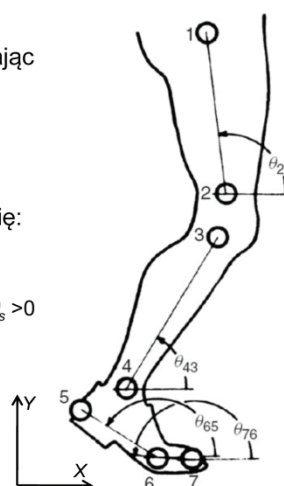


zgięcie
grzbietowe

zgięcie
podeszwowe

$$\theta_s = \theta_{43} - \theta_{65} + 90$$

(co oznacza, zgięcie grzbietowe dla $\theta_s > 0$
oraz zgięcie podeszwowe dla $\theta_s < 0$)



WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI

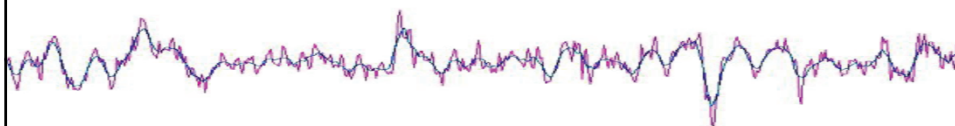
Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie



OBLICZENIA WIELKOŚCI KINEMATYCZNYCH

Prędkości liniowe i kątowe

- ❖ Podstawową operacją, jaka musi być przeprowadzona przed wykorzystaniem danych o położeniach markerów do obliczania prędkości i przyspieszeń (zarówno kątowych, jak też liniowych), jest „wygładzenie” surowych przebiegów współrzędnych (najczęściej przez zastosowanie odpowiednich filtrów^{*)}.



- ❖ Najprostszą metodą obliczania pochodnych (np. składowych prędkości markerów) na podstawie przebiegów czasowych sygnałów (np. składowych współrzędnych markerów) jest metoda różnic skończonych.

^{*)} Szczegółowe informacje na temat „wygładzania” danych doświadczalnych/filtrowania sygnałów można znaleźć w pracy: David A. Winter, „Biomechanics and motor control of human movement”, 4th ed., John Wiley & Sons, Inc., 2009.

Są też przedmiotem wykładu: M. Świetlik, „Teoria sygnałów biologicznych”, PW, 2015.



WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI

Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie



OBLICZENIA WIELKOŚCI KINEMATYCZNYCH

Prędkości liniowe i kątowe

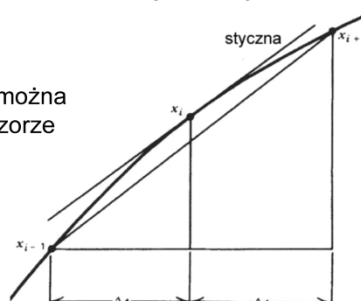
- ❖ Wykorzystuje się kilka wariantów metody różnic skończonych, np.:

$$v_{x_i} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} \text{ m/s}$$

(jest to, rzecz jasna przybliżenie, wzór ten jest ścisły przy spełnieniu założenia, że nachylenie stycznej do $x_i(t)$ w punkcie $t = t_i$, jest takie same jak nachylenie odcinka $[x_{i-1}, x_{i+1}]$)

- ❖ Do obliczenia prędkości kątowych wykorzystać można podobną zależność zastępując w powyższym wzorze przemieszczenia i prędkości liniowe, kątowymi:

$$\omega_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\Delta t} \text{ rad/s}$$



WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI

Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie



OBLICZENIA WIELKOŚCI KINEMATYCZNYCH

Przyspieszenia liniowe i kątowe

❖ Podstawowy wzór:
$$a_{X_i} = \frac{v_{X_{i+1}} - v_{X_{i-1}}}{2\Delta t} \text{ m/s}^2$$

(łatwo zauważyć, że potrzebujemy tu 5 próbek danych od $i-2$ do $i+2$)

❖ Przedstawiona poniżej alternatywna zależność wymaga tylko 3 próbek (od $i-1$ do $i+1$)

$$a_{X_i} = \frac{v_{X_{i+1/2}} - v_{X_{i-1/2}}}{\Delta t} \text{ m/s}^2$$

gdzie: $v_{X_{i+1/2}} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \text{ m/s}$ $v_{X_{i-1/2}} = \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \text{ m/s}$

po podstawieniu:
$$a_{X_i} = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} \text{ m/s}^2$$

❖ Do obliczenia przyspieszeń kątowych wykorzystać można podobne wzory zastępując w powyższych wyrażeniach przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia liniowe, kątowymi.



WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI

Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie



OBLICZENIA WIELKOŚCI KINEMATYCZNYCH — WZORY STIRLINGA

Dla zbioru par danych pomiarowych (np. współrzędnych markerów) $\{t_i, f(t_i)\}$, gdzie: $t_{i+1} = t_i + h$ i $h = \text{const}$, należy utworzyć tabelę zgodnie z przedstawionym niżej wzorcem:

t	f(t)	$\delta f(t)$	$\delta^2 f(t)$	$\delta^3 f(t)$	$\delta^4 f(t)$
$t_0 - 2h$	$f(t_0 - 2h)$	$\delta f(t_0 - 3/2h) = f(t_0 - h) - f(t_0 - 2h)$	$\delta^2 f(t_0 - h) = \delta f(t_0 - 1/2h) - \delta f(t_0 - 3/2h)$	$\delta^3 f(t_0 - 1/2h) = \delta^2 f(t_0) - \delta^2 f(t_0 - h)$	$\delta^4 f(t_0) = \delta^3 f(t_0 + 1/2h) - \delta^3 f(t_0 - 1/2h)$
$t_0 - h$	$f(t_0 - h)$	$\delta f(t_0 - 1/2h) = f(t_0) - f(t_0 - h)$	$\delta^2 f(t_0) = \delta f(t_0 + 1/2h) - \delta f(t_0 - 1/2h)$	$\delta^3 f(t_0 + 1/2h) = \delta^2 f(t_0 + h) - \delta^2 f(t_0)$	
t_0	$f(t_0)$	$\delta f(t_0 + 1/2h) = f(t_0 + h) - f(t_0)$	$\delta^2 f(t_0 + h) = \delta f(t_0 + 3/2h) - \delta f(t_0 + 1/2h)$		
$t_0 + h$	$f(t_0 + h)$	$\delta f(t_0 + 3/2h) = f(t_0 + 2h) - f(t_0 + h)$			
$t_0 + 2h$	$f(t_0 + 2h)$				



WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI

Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie



OBLICZENIA WIELKOŚCI KINEMATYCZNYCH — WZORY STIRLINGA

Pierwszą i drugą pochodną można policzyć korzystając z tabeli i stosując formuły:

$$f'(t_0) = \frac{1}{h} \left[\frac{\delta f(t_0 - \frac{1}{2}h) + \delta f(t_0 + \frac{1}{2}h)}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\delta^3 f(t_0 - \frac{1}{2}h) + \delta^3 f(t_0 + \frac{1}{2}h)}{2} + \dots \right]$$

$$f''(t_0) = \frac{1}{h^2} \left[\delta^2 f(t_0) - \frac{1}{12} \delta^4 f(t_0) + \frac{1}{90} \delta^6 f(t_0) + \dots \right]$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI

Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Uwagi końcowe, źródła, piśmiennictwo

- ❖ Podstawowe źródło wykorzystanych informacji i materiału wyjściowego do ilustracji:
David A. Winter: Biomechanics and motor control of human movement, 4th ed., John Wiley & Sons, Inc., 2009.
- ❖ Warto zapoznać się z:
pełnym tekstem rozdz. 7. i 3. wymienionej wyżej książki.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

WYBRANE ZAGADNIENIA METOD EKSPERYMENTALNYCH I OBLICZENIOWYCH BIOMECHANIKI

Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Dziękuję za uwagę



Wykład współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego,
udostępniany nieodpłatnie



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

