# Metody obliczeniowe optymalizacji

## Ćwiczenie 3: Metody poszukiwania minimum funkcji w kierunku

Paweł Malczyk

Zakład Teorii Maszyn i Robotów
Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej
Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Politechnika Warszawska

# Plan ćwiczeń

# Metody obliczeniowe optymalizacji

# Idea metod iteracyjnych

✔ ***Przykład 1***

Sprawdzić, czy kierunek $\mathbf{d}$ w punkcie $\mathbf{x}$ jest kierunkiem poprawy.

1. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + e^{x_1+x_2}, \mathbf{d} = [1, 2]^T, \mathbf{x} = [0, 0]^T.$
2. $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2 + 7, \mathbf{d} = [-1, 1]^T, \mathbf{x} = [2, 1]^T.$
3. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 4, \mathbf{d} = [2, 1]^T, \mathbf{x} = [1, 1]^T.$
4. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3, \mathbf{d} = [-3, 10, -12]^T, \mathbf{x} = [1, 2, 3]^T.$
5. $f(\mathbf{x}) = 0.1x_1^2 + x_2^2 - 10, \mathbf{d} = [1, 2]^T, \mathbf{x} = [4, 1]^T.$
6. $f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2, \mathbf{d} = [2, 3]^T, \mathbf{x} = [4, 3]^T.$
7. $f(\mathbf{x}) = 10(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2, \mathbf{d} = [162, -40]^T, \mathbf{x} = [2, 2]^T.$
8. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \mathbf{d} = [2, 4, -2]^T, \mathbf{x} = [1, 2, -1]^T.$

# Idea metod iteracyjnych

### ✔ *Przykład 2*

Dana jest funkcja $f(\mathbf{x})$ oraz punkt $\mathbf{x}$. Wyznaczyć dokładny krok algorytmu $\alpha$ w kierunku $\mathbf{d}$.

1. $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 + 7, \mathbf{d} = [-1, -1]^T, \mathbf{x} = [1, 2]^T$.
2. $f(\mathbf{x}) = 0.1x_1^2 + x_2^2 - 10, \mathbf{d} = [-1, -2]^T, \mathbf{x} = [5, 1]^T$.
3. $f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2, \mathbf{d} = [-4, -6]^T, \mathbf{x} = [4, 4]^T$.
4. $f(\mathbf{x}) = 10(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2, \mathbf{d} = [-162, 40]^T, \mathbf{x} = [2, 2]^T$.
5. $f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^2 + x_2^2, \mathbf{d} = [2, -2]^T, \mathbf{x} = [1, 1]^T$.
6. $f(\mathbf{x}) = 0.5x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 7x_1 - 7x_2, \mathbf{d} = [7, 6]^T, \mathbf{x} = [1, 1]^T$.
7. $f(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2, \mathbf{d} = [-4, -8, -4]^T, \mathbf{x} = [1, 1, 1]^T$.
8. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \mathbf{d} = [-2, -4, 2]^T, \mathbf{x} = [1, 2, -1]^T$.

# Metody eliminacji

### ✔ *Przykład 3*

Znaleźć minimum funkcji $f(x) = x(x - 1.5)$ w przedziale $< 0, 1 >$ z dokładnością $\epsilon = 10\%$ wartości dokładnej za pomocą następujących metod eliminacji:

1. Metoda podziału na równe części.
2. Metoda dychotomii, jeśli wartość parametru $\delta = 0.0001$.
3. Metoda połowienia.

### ✔ *Przykład 4*

Metodą Fibonacciego i metodą złotego podziału znaleźć minimum funkcji $f(x) = 0.65 - \frac{0.75}{1+x^2} - 0.65x \cdot arctg\left(\frac{1}{x}\right)$ w przedziale $< 0, 3 >$, jeśli liczba obserwacji $n = 6$.

# Metody interpolacji

✔ ***Przykład 5***

Znaleźć minimum funkcji $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5$ za pomocą metody interpolacji kwadratowej. Założyć, że początkowy krok w metodzie interpolacji jest równy $0.5$.

✔ ***Przykład 6***

Znaleźć minimum funkcji $f(x) = x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ w kierunku $\mathbf{d} = [-1, 0]^T$. Założyć, że przybliżenie startowe jest położone w punkcie $\mathbf{x}_0 = [0, 0]^T$. Założyć, że początkowy krok w metodzie interpolacji jest równy $0.1$.

# Metody znajdowania pierwiastków wielomianów

***✔ Przykład 7***

Znaleźć minimum funkcji $f(x) = 0.65 - \frac{0.75}{1+x^2} - 0.65x \cdot arctg\left(\frac{1}{x}\right)$ za pomocą następujących metod:

1. Metoda Newtona, punkt startowy $x_0 = 0.1$, za kryterium stopu przyjąć $|f'(x)| \leq \epsilon = 0.01$.
2. Metoda quasi-Newtona (różnice centralne z krokiem $\Delta x = 0.01$), punkt startowy $x_0 = 0.1$, za kryterium stopu przyjąć $|f'(x)| \leq \epsilon = 0.01$.
3. Metoda siecznych w przedziale $< 0.4; 0.8 >$, punkt startowy $x_0 = 0.1$, za kryterium stopu przyjąć $|f'(x)| \leq \epsilon = 0.01$.