



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Politechnika Warszawska

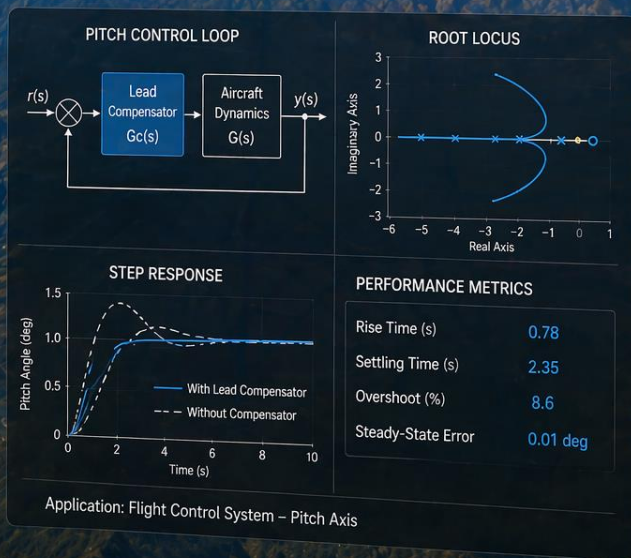
Podstawy Automatyki i Sterowania II

Ćwiczenie 5: Projektowanie kompensatorów
przyspieszających fazę (LEAD) metodą linii pierwiastkowych

Warszawa, maj 2025 r.

Plan Zajęć

1. Po co projektujemy kompensatory?
2. Zastosowania kompensatora LEAD
3. Metoda linii pierwiastkowych
4. Procedura szkicowania linii pierwiastkowych
5. Kompensator typu LEAD
6. Procedura doboru kompensatora LEAD metoda linii pierwiastkowych
7. Przykłady
8. Podsumowanie
9. Spis Piśmiennictwa



Po co projektujemy kompensatory?

- ✓ Problemy w układach rzeczywistych: zbyt wolna odpowiedź, nadmierne przeregulowanie, niestabilność systemu.
- ✓ Przykład układu bez kompensatora: ograniczenia wydajności, brak możliwości spełnienia wymagań projektowych
- ✓ Możliwe działania korygujące: zmiana struktury układu, dodanie odpowiedniego regulatora.
- ✓ Kompensatory są niezbędne, gdy układ sterowania nie spełnia wymagań dotyczących jakości regulacji. Pozwalają one na modyfikację charakterystyk dynamicznych systemu bez ingerencji w jego podstawową strukturę.
- ✓ Dzięki zastosowaniu kompensatorów możemy **poprawić szybkość odpowiedzi, zmniejszyć przeregulowanie** oraz **zwiększyć stabilność układu.**



Proces projektowania kompensatorów

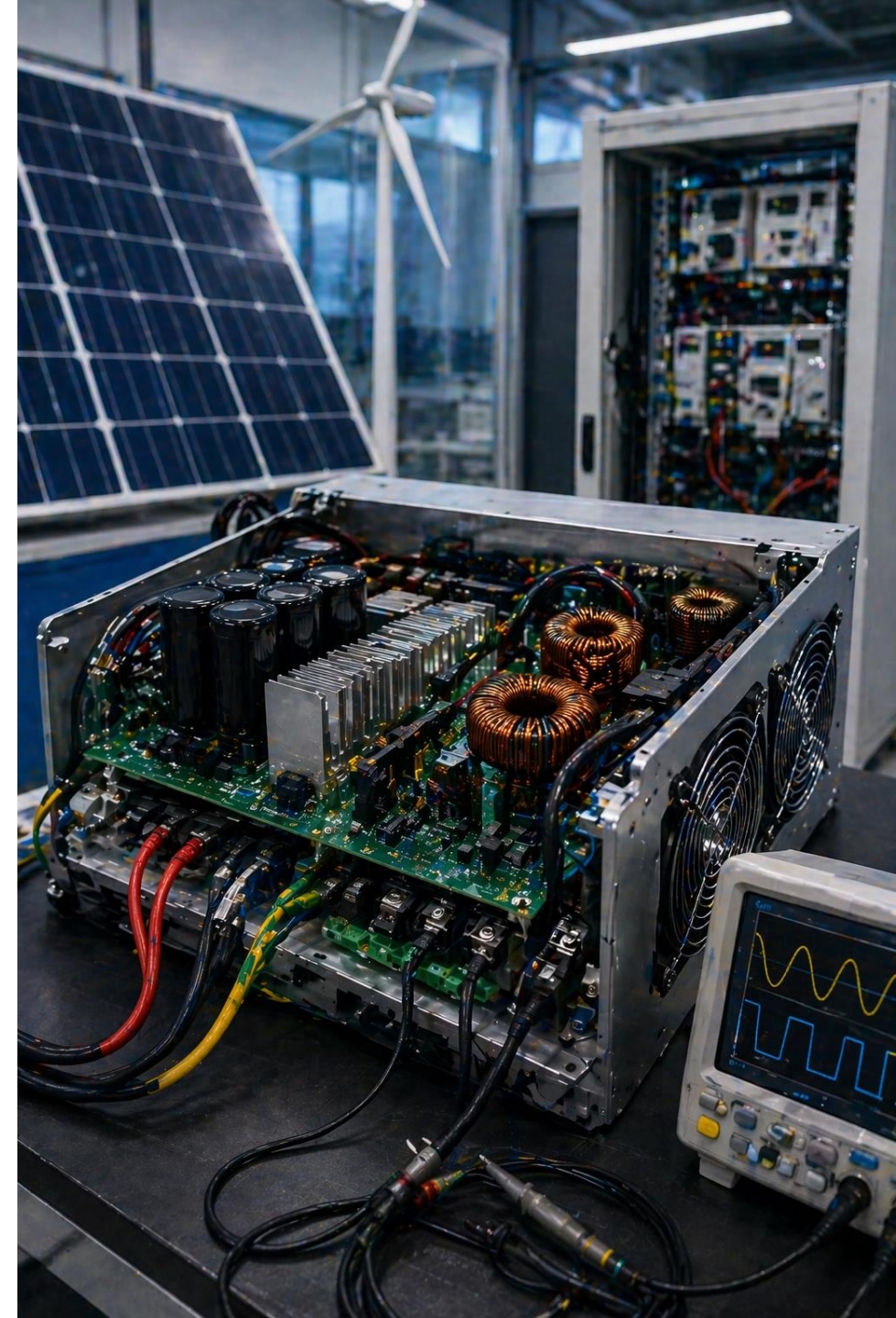
- ✓ Proces projektowania kompensatora rozpoczynamy od jasnego **zdefiniowania wymagań**, następnie **analizujemy układ otwarty** i **wybieramy odpowiedni typ kompensatora**.
- ✓ **Kluczowym etapem** jest **dobór położzeń zer i biegunów kompensatora**, który pozwala na uzyskanie pożądanych właściwości dynamicznych układu zamkniętego.
- ✓ Projektowanie kompensatorów wymaga nie tylko **wiedzy teoretycznej**, ale także **praktycznego doświadczenia**.
- ✓ Warto pamiętać o typowych błędach, takich jak nieodpowiednie umieszczenie zer i biegunów kompensatora czy ignorowanie marginesów stabilności, które mogą prowadzić do nieoptymalnych lub nawet niestabilnych zakresów pracy układów.



Implementacja kompensatora

Implementacja zaprojektowanego kompensatora w praktyce wymaga przejścia przez kilka kluczowych etapów. Rozpoczynamy od **modelowania matematycznego układu i kompensatora**, co pozwala na wstępną weryfikację koncepcji. Następnie przeprowadzamy **symulacje numeryczne** np. w środowisku SIMULINK, które umożliwiają **testowanie różnych scenariuszy bez ryzyka uszkodzenia rzeczywistego systemu**.

Po pozytywnej weryfikacji w bezpiecznym środowisku numerycznym, przechodzimy do **wdrożenia kompensatora**, wykorzystując mikrokontrolery lub dedykowane sterowniki. Ostatnim etapem jest **przeprowadzenie testów doświadczalnych** oraz **strojenie parametrów w warunkach rzeczywistych**, aby uzyskać korzystne charakterystyki pracy.



Automotive

Kompensator typu „lead” jest często pierwszym krokiem przed zastosowaniem bardziej zaawansowanych metod (np. MPC), pozwala analizować wpływ zmian parametrów pojazdu. Jest stosowany w systemach sterowania silnikami (DC, BLDC, PMSM), układach zawieszenia aktywnego, tempomatach i systemach ADAS.

Kompensator typu „lead” skraca czas narastania i czas regulacji odpowiedzi, redukuje przeregulowanie, poprawia stabilność, umożliwia projektowanie regulatorów dla modeli o zmiennym wzmacnieniu.



Zastosowania w Energetyce

Stabilizacja i poprawa dynamiki systemów elektroenergetycznych

Kompensatory typu „lead”, częściej „lag-lead” projektowane metodą „root locus” są szeroko stosowane w stabilizatorach systemów elektroenergetycznych (ang. *Power System Stabilizers – PSS*). Gdy występują oscylacje niskoczęstotliwościowe (0.1–2 Hz), wymagane jest szybkie tłumienie drgań.

Kompensator typu „Lead” przesuwa bieguny dominujące układu w lewo (zapewniając większe tłumienie), zwiększa zapas fazy, poprawia stabilność. Kompensator „lead” jest kluczowym elementem stabilizacji systemów energetycznych oraz regulacji napięcia i częstotliwości, umożliwia bezpośrednio kształtowanie trajektorii biegunów układu zamkniętego pozwala dobrać parametry regulatora na podstawie położenia biegunów dominujących.



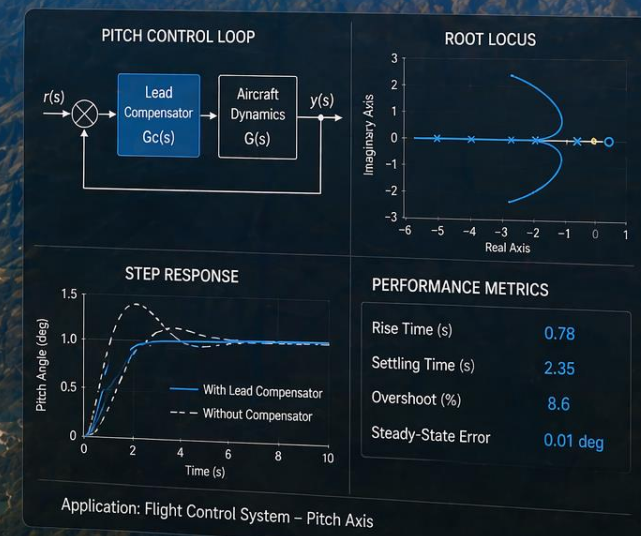
Zastosowania w Lotnictwie

Kompensator typu „Lead” zwiększa zapasy stabilności, przesuną bieguny w obszar stabilności, poprawia tłumienie drgań. Metoda RL umożliwia analizę stabilności układu przy zmianach wybranych parametrów (np. masy, współczynników aerodynamicznych). Stosowane w systemach: autopilotów, stabilizacji lotu, kontroli orientacji satelitów, gdy wymagana jest wysoka stabilność szybka reakcja na zakłócenia.

Bibliografia:

B. C. Kuo and F. Golnaraghi, Automatic Control Systems, 9th ed. Wiley, 2014.

K. J. Åström and R. M. Murray, Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers. Princeton University Press, 2008.



Zastosowania w Robotyce

Kompensator typu „lead” stosujemy, gdy kluczowe są: szybka odpowiedź, wysoka dokładność pozycjonowania, szybsze śledzenie trajektorii. Root locus (RL) jest preferowaną metodą w projektowaniu regulatorów SISO w robotyce klasycznej. Zastosowania: manipulatory, systemy serwo, roboty przemysłowe.

Bibliografia:

G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini, Feedback Control of Dynamic Systems, 7th ed. Pearson, 2015.

R. C. Dorf and R. H. Bishop, Modern Control Systems, 13th ed. Pearson, 2016.

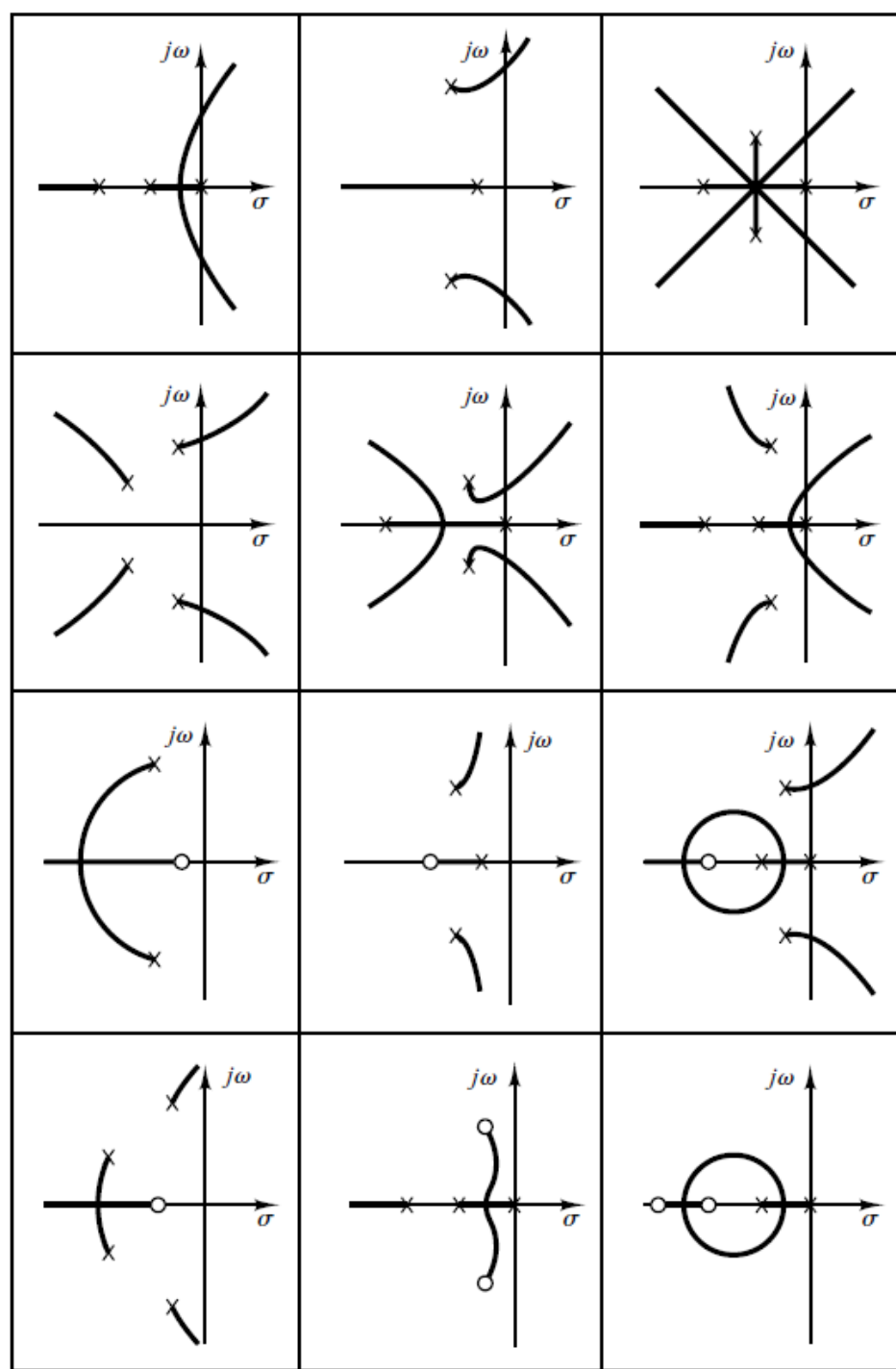


Metoda linii pierwiastkowych

Metoda linii pierwiastkowych to narzędzie wykorzystywane w teorii sterowania do **badania wpływu zmian wzmocnienia na stabilność i dynamikę układów regulacji** poprzez analizę wszystkich możliwych położzeń biegunów układu zamkniętego.

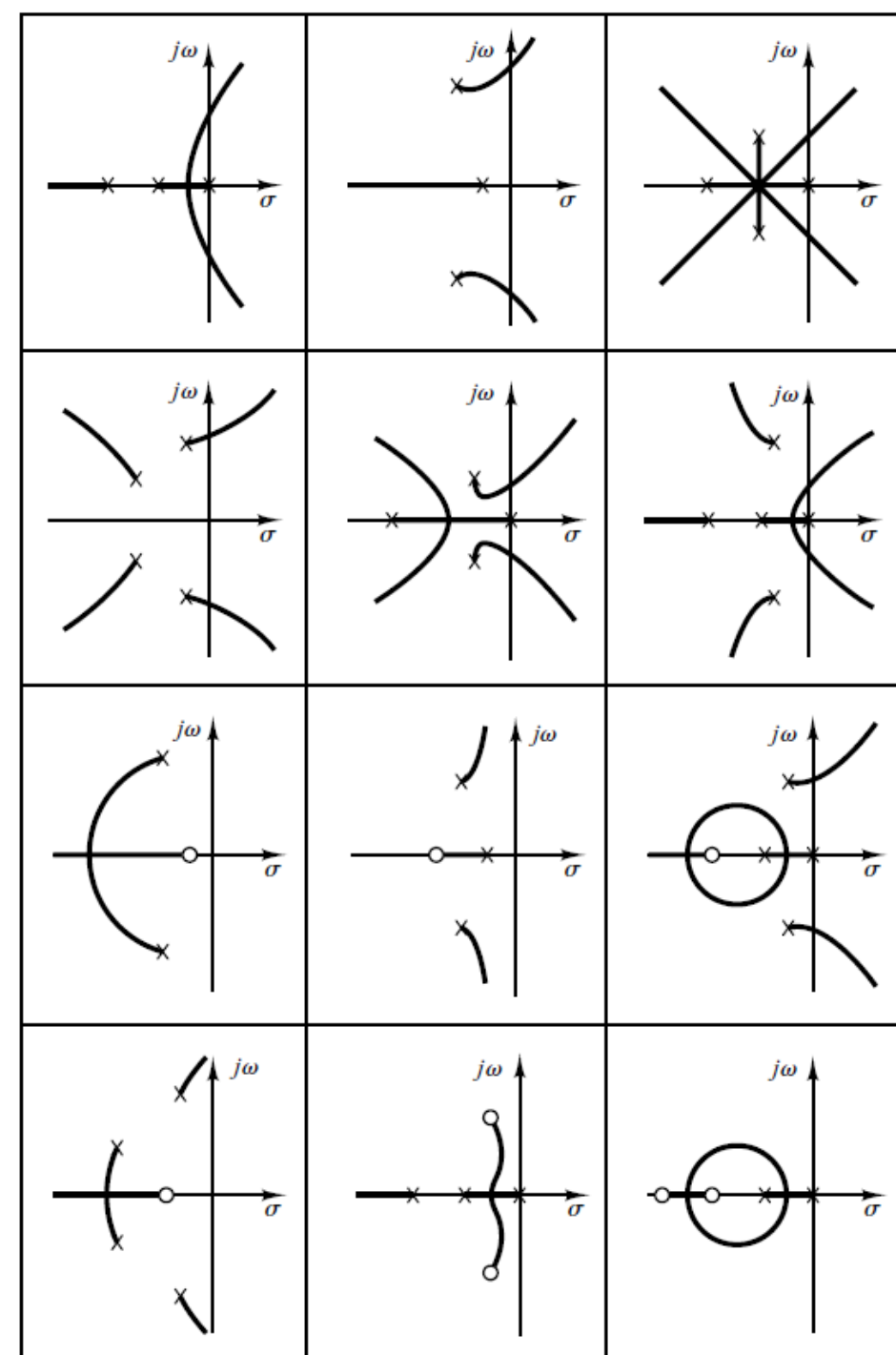
Linie pierwiastkowe wizualizują ścieżki, po których można przemieszczać bieguny układu zamkniętego dobierając odpowiednią wartość wzmocnienia K od zera do nieskończoności.

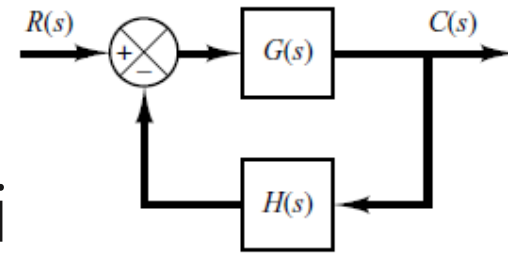
Analiza tych ścieżek dostarcza cennych **informacji o zachowaniu układu** w szerszym zakresie pracy i umożliwia **świadome projektowanie kompensatorów/ regulatorów**.



Projektowanie układów sterowania metodą linii pierwiastkowych

- ✓ **Wzajemne położenie biegunów układu zamkniętego** ma istotny wpływ na charakter odpowiedzi przejściowych układów.
- ✓ Czasami już sama korekcja wzmocnienia może zapewnić pożądane własności układu.
- ✓ Znajdowanie biegunów w przypadku wielomianów o stopniach wyższych niż 3 wymaga stosowania obliczeń numerycznych.
- ✓ Istnieje jednak prosta, graficzna metoda znajdowania pierwiastków równania charakterystycznego, zwana metodą linii pierwiastkowych.
- ✓ Na płaszczyźnie zmiennej zespolonej rysuje się **wszystkie możliwe położenia pierwiastków równania charakterystycznego** dla wszystkich wartości określonego parametru, którym na ogół jest wzmocnienie układu.





Reguły szkicowania linii pierwiastkowych

Do zrozumienia idei rysowania linii pierwiastkowych niezbędne jest wprowadzenie warunku kąta i warunku modułu. Rozważmy układ sterowania z ujemną pętlą sprzężenia zwrotnego (schemat blokowy).
 Transmitancja operatorowa układu zamkniętego:

$$G_z(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

***) Równanie charakterystyczne układu zamkniętego:**

$$1 + G(s)H(s) = 0 \Leftrightarrow G(s)H(s) = -1 \quad *) \Leftrightarrow 1) \wedge 2)$$

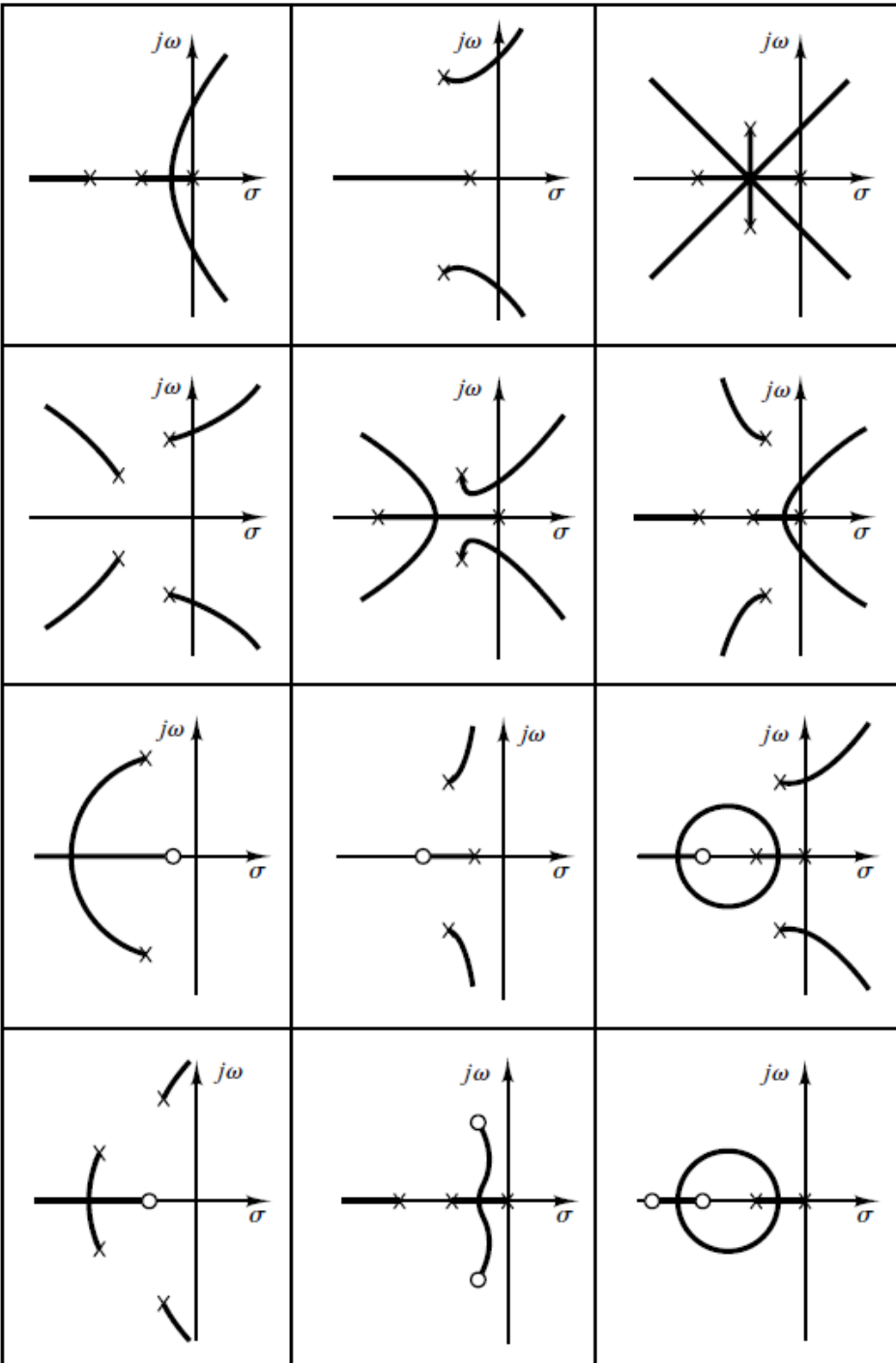
Jest równoważne 2 warunkom:

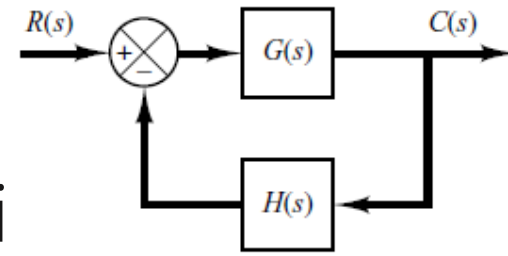
1) Warunkowi kąta:

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ(2k + 1) \text{ dla } k = 0,1,2,3 \dots$$

2) Warunkowi modułu:

$$|G(s)H(s)| = 1$$





Reguły szkicowania linii pierwiastkowych

Wartości zmiennej zespolonej s , które spełniają warunek kąta i warunek modułu to rozwiązania równania charakterystycznego (pierwiastki, bieguny) układu zamkniętego.

Zauważmy, że w równaniu charakterystycznym układu zamkniętego:

$$*) 1 + G(s)H(s) = 0 \Leftrightarrow G(s)H(s) = -1 \quad *) \Leftrightarrow 1) \wedge 2),$$

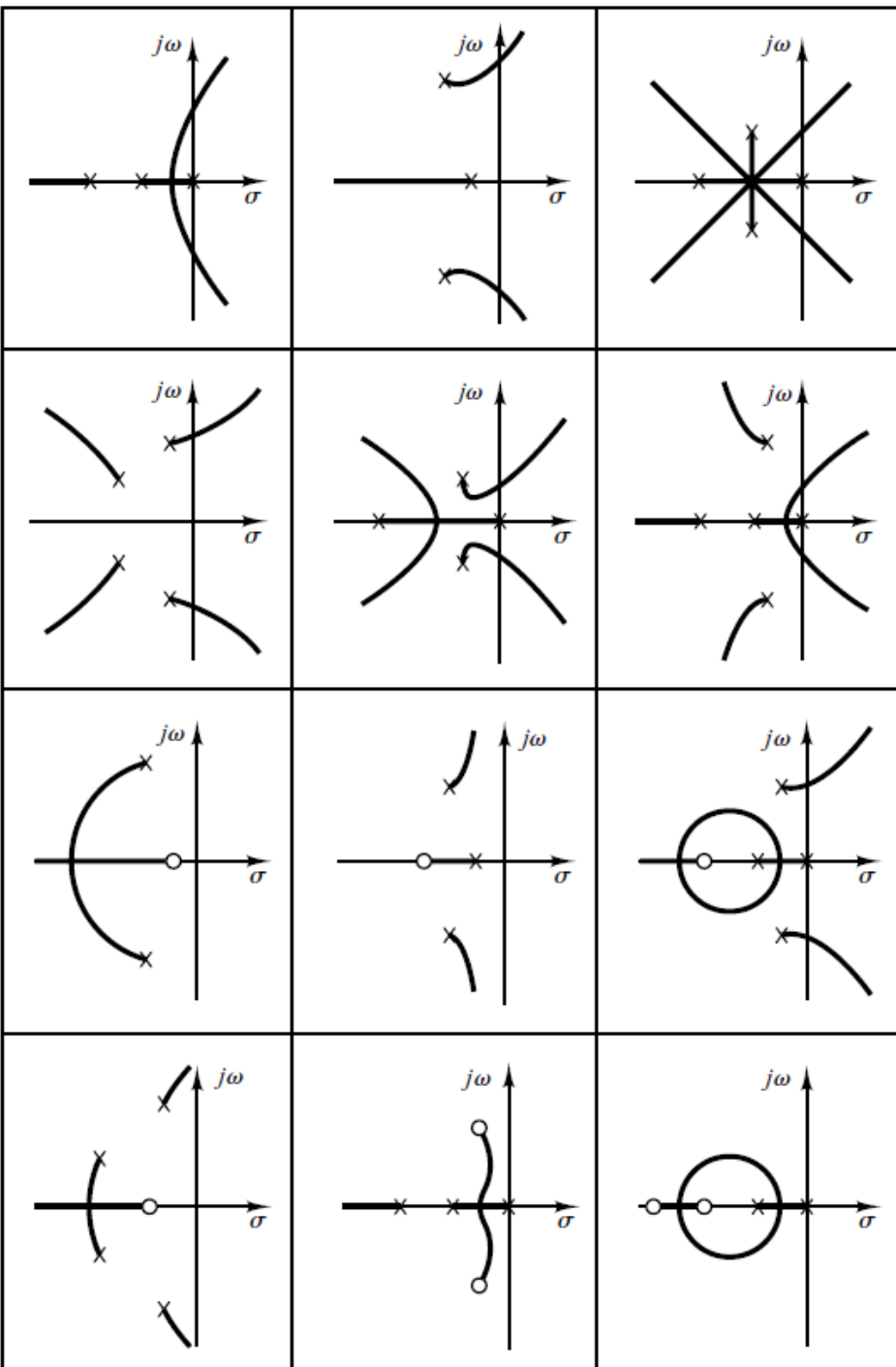
występuje transmitancja operatorowa układu otwartego:

$$G_o(s) = G(s)H(s)$$

1) **Wykres punktów, które spełniają tylko warunek kąta** ($\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ(2k + 1)$ dla $k = 0, 1, 2, 3 \dots$) **nazywamy liniami pierwiastkowymi.**

2) Wartości biegunów, związane z określonym wzmocnieniem, zmieniającym się od 0 do ∞ , mogą być wyznaczone z warunku modułu:

$$|G(s)H(s)| = 1$$



Obliczanie modułu i kątów

Rozważmy następujący przykład transmitancji operatorowej układu otwartego:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+z_1)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)(s+p_4)}$$

gdzie p_1, p_2, p_3 i p_4 są biegunami układu otwartego, a z_1 jest zerem $G(s)H(s)$. Kąty i moduł transmitancji układu otwartego określamy następująco:

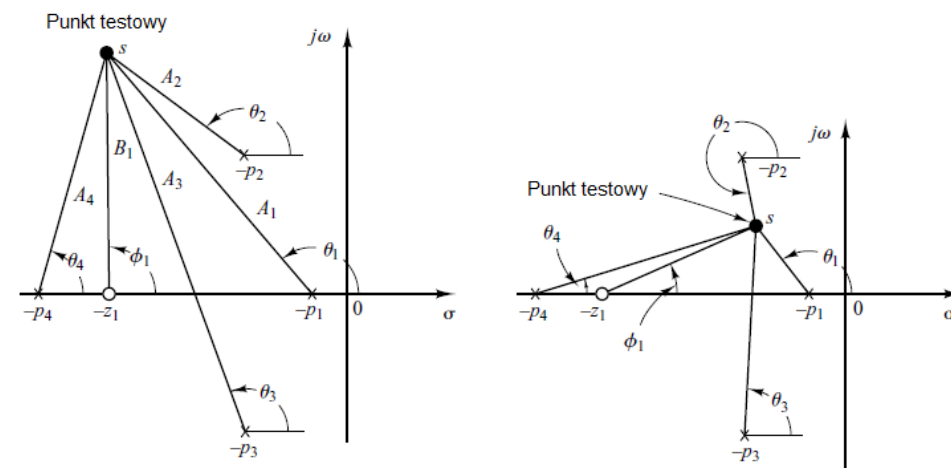
Z warunku kąta:

$$\angle G(s)H(s) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 = \pm 180^\circ(2k + 1) \text{ dla } k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Z warunku modułu:

$$|G(s)H(s)| = \frac{KB_1}{A_1 A_2 A_3 A_4} = 1$$

Wartości powyższych kątów i amplitud pokazano na rysunku.



Reguły szkicowania linii pierwiastkowych

$$1 + G(s)H(s) = 0 \Leftrightarrow G(s)H(s) = -1$$

Dany jest układ przedstawiony na rysunku. Wyznaczamy równanie charakterystyczne. Transmittancję operatorową układu otwartego przedstawiamy w postaci funkcji wymiernej:

$$1 + \frac{K(s+z_1)(s+z_2)(\dots)(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)(\dots)(s+p_n)} = 0$$

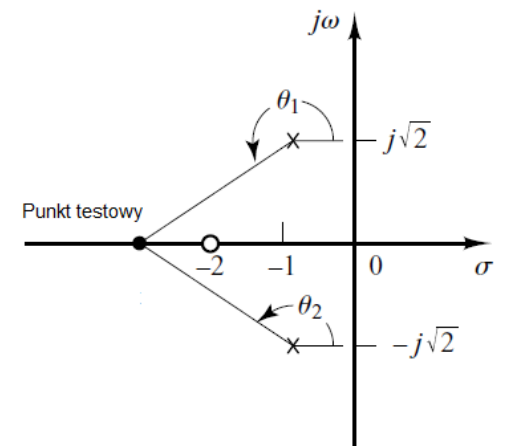
gdzie $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ są biegunami transmittancji układu otwartego, a z_1, \dots, z_m są zerami układu otwartego $G(s)H(s)$.

Zakładamy, że współczynnik wzmocnienia **$K > 0$** .

Jeśli $K < 0$, to układ z rysunku stanowi układ z dodatnim sprzężeniem zwrotnym i wtedy dla poprawności rozważań musimy zmodyfikować warunek kąta.

Reguły szkicowania linii pierwiastkowych

- 1) Ustalić położenie biegunów i zer układu otwartego $G(s)H(s)$.** Linie pierwiastkowe rozpoczynają się od biegunów $G(s)H(s)$, a kończą w zerach $G(s)H(s)$ (skończonych, bądź w nieskończoności). Wykres linii pierwiastkowych będzie miał n gałęzi. Na ogół liczba biegunów jest większa od liczby zer transmitancji układu otwartego ($n \geq m$). Ponieważ liczba gałęzi wynosi n , to $n-m$ gałęzi będzie się kończyło w nieskończonych zerach, wzdłuż asymptot. Linie pierwiastkowe są symetryczne względem osi rzeczywistej.
- 2) Określić fragmenty linii pierwiastkowych, które leżą na osi rzeczywistej.** Wpływ na położenie fragmentów linii pierwiastkowych na osi rzeczywistej mają tylko zera i bieguny leżące na tej osi. Zespólone, sprzężone bieguny i zera transmitancji $G(s)H(s)$ nie mają wpływu na położenie linii pierwiastkowych na osi rzeczywistej, gdyż wprowadzają kąt 360° . Aby zbadać, czy linia pierwiastkowa leży na fragmencie osi rzeczywistej, wybieramy na niej punkt testowy. Jeśli całkowita liczba zer i biegunów na prawo od punktu testowego jest nieparzysta, to ten punkt należy do linii pierwiastkowej.



Reguły szkicowania linii pierwiastkowych

3) Wyznaczyć asymptoty linii pierwiastkowych i punkty przecięcia asymptot. Kąty asymptot względem osi rzeczywistej wyznacza się z następującego wzoru:

$$\alpha = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{n-m} \text{ dla } k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Wszystkie asymptoty przecinają oś rzeczywistą. Miejsce przecięcia asymptoty z osią rzeczywistą wyznaczamy z zależności:

$$\sigma_\alpha = \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)}{n-m}$$

Lub

$$\sigma_\alpha = \frac{\sum \text{biegunów} - \sum \text{zer}}{n-m}$$

Reguły szkicowania linii pierwiastkowych

4) Punkty rozgałęzień.

Punkty rozgałęzień odpowiadają pierwiastkom wielokrotnym równania charakterystycznego. Przypuśćmy, że równanie charakterystyczne dane jest w następującej postaci:

$$B(s) + KA(s) = 0 \Rightarrow K = \dots$$

Punkty rozgałęzień mogą być wyznaczone z następującej równości:

$$\frac{dK}{ds} = \frac{B'(s)A(s) - B(s)A'(s)}{A^2(s)} = 0$$

Nie wszystkie pierwiastki równania są punktami rozgałęzień. Jeśli wyznaczone pierwiastki są rzeczywiste i należą do fragmentów linii pierwiastkowych leżących na osi rzeczywistej, to są to faktyczne punkty rozgałęzień. Jeśli dwa pierwiastki $s = s_1$ i $s = -s_1$ równania są sprzężone i jeśli nie jest pewne, czy leżą na liniach pierwiastkowych, to sprawdzamy wartość wzmocnienia K dla pierwiastka s_1 . Jeśli wartość wzmocnienia K , związana z pierwiastkiem s_1 , wyznaczonym z równania na K , jest dodatnia i rzeczywista, to jest to faktyczny punkt rozgałęzienia.

Reguły szkicowania linii pierwiastkowej

5) Kąt wyjścia z bieguna i wejścia do zera.

Kąt wyjścia z bieguna wyznaczamy z następującej równości:

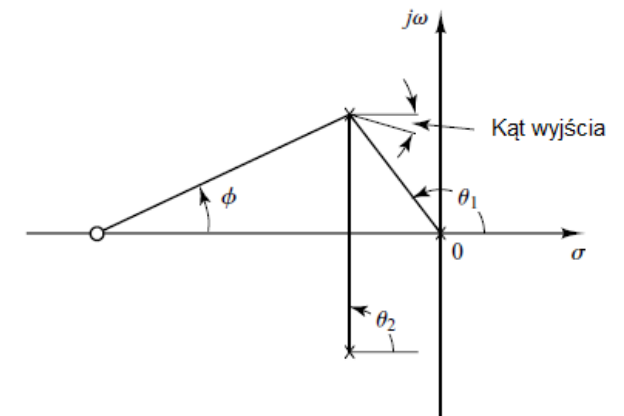
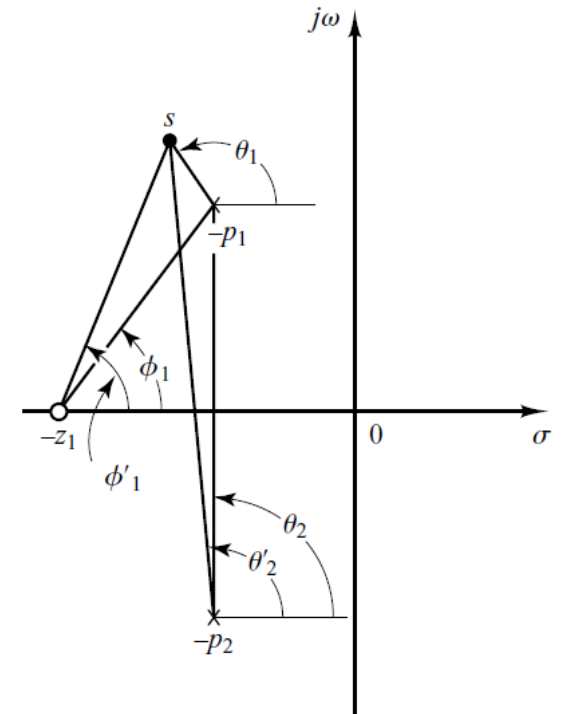
$$\theta_d = 180^\circ - \sum \text{kątów od innych biegunów} + \sum \text{kątów od zer}$$

Kąt wejścia do zera wyznaczamy z następującej równości:

$$\theta_a = 180^\circ - \sum \text{kątów od innych zer} + \sum \text{kątów od biegunów}$$

Przykładowy kąt wyjścia zaznaczono na rysunku.

6) Punkty przecięcia z osią urojoną. Punkty przecięcia z osią urojoną znajdujemy poprzez zastosowanie kryterium Routha-Hurwitza, bądź poprzez wstawienie wartości $s = j\omega$ do równania charakterystycznego i rozwiązaniu go względem K i ω .



Reguły szkicowania linii pierwiastkowych

7) Określenie biegunów dominujących układu zamkniętego.

Punkt na linii pierwiastkowej będzie biegunem dominującym układu zamkniętego, wtedy, gdy będzie spełniał warunek amplitudy. Można również wyznaczyć wartość parametru wzmocnienia K , dla dowolnego punktu na linii pierwiastkowej (np. punktu s_1).

Wartość parametru wzmocnienia K możemy wyznaczyć z warunku modułu:

$$|G(s)H(s)| = \frac{KB_1}{A_1A_2A_3A_4} = 1$$

$$K = \frac{1}{|G(s)H(s)|}$$

Linie stałego tłumienia oraz częstości drgań własnych

Transmitancja układu drugiego rzędu ma postać:

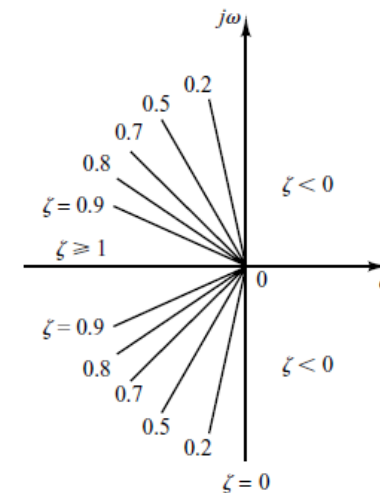
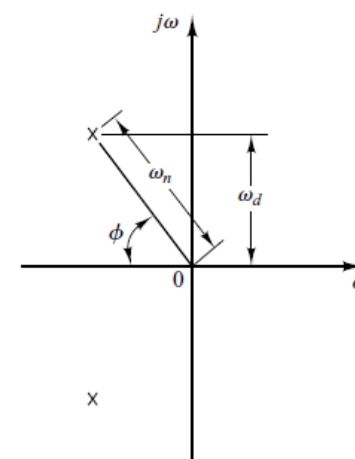
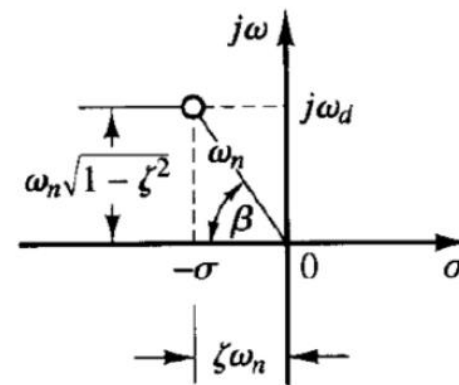
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

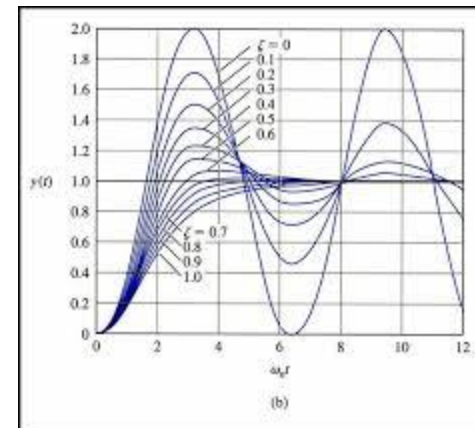
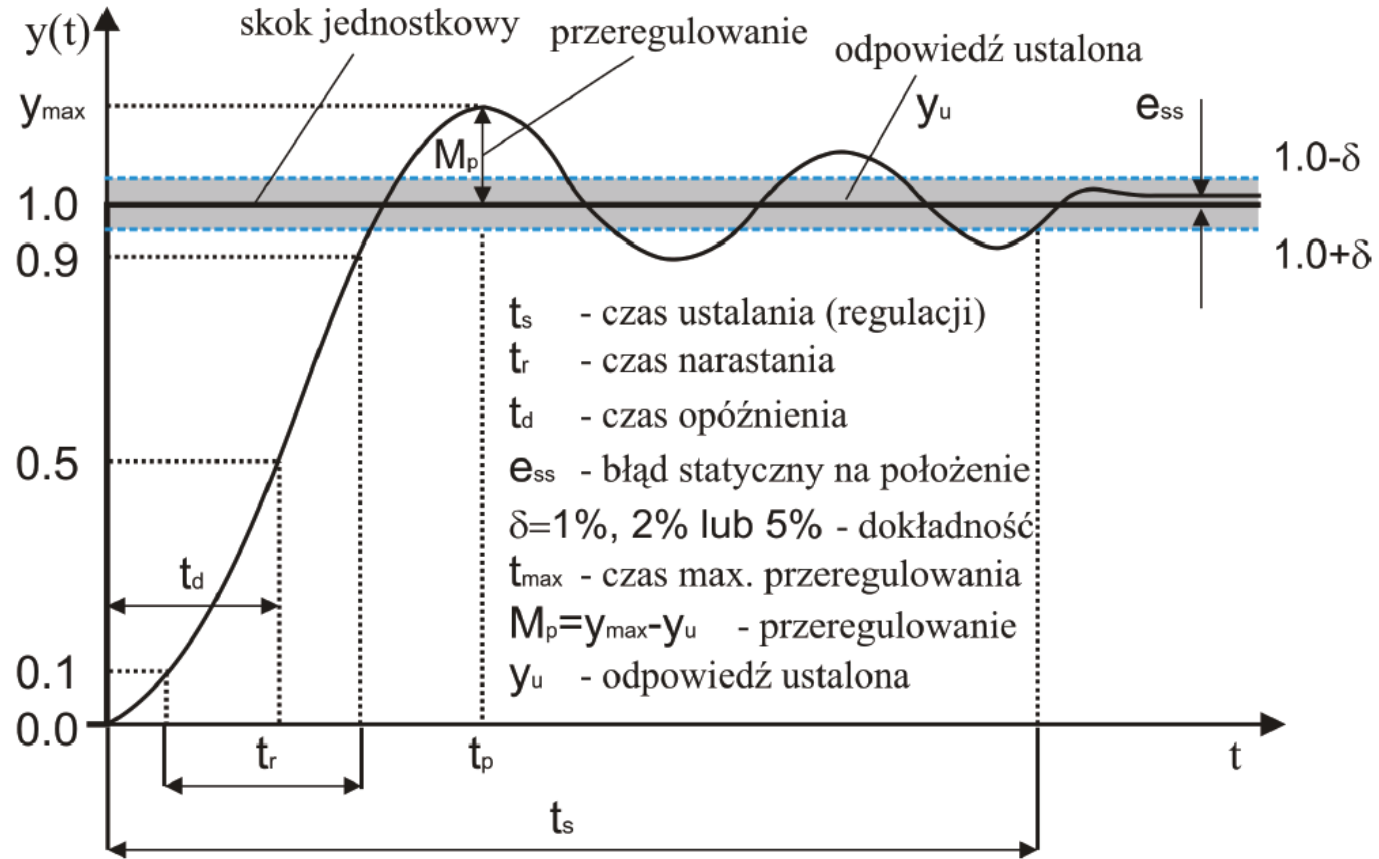
gdzie ω_n jest częstością drgań własnych, a ξ jest współczynnikiem tłumienia drgań. Dla tłumienia podkrytycznego $0 < \xi < 1$ mamy:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \xi\omega_n + j\omega_d)(s + \xi\omega_n - j\omega_d)}$$

gdzie:

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ to częstość drgań tłumionych, zaś $\cos\beta = \xi$







- Czas ustalania (regulacji)

$$t_s = \frac{4.6}{\xi\omega_n} \text{ dla } \delta = 1\% \quad t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \text{ dla } \delta = 2\% \quad t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} \text{ dla } \delta = 5\% \quad t_s = \frac{2.3}{\xi\omega_n} \text{ dla } \delta = 10\%$$

- Przeregulowanie

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \text{ to } \xi = \sqrt{\frac{(\ln M_p)^2}{\pi^2 + (\ln M_p)^2}} \text{ lub procentowo } M_p = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

- Czas maksymalnego przeregulowania

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \text{ gdzie } \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} - \text{częstość drgań tłumionych}$$

- Czas opóźnienia

$$t_d = \frac{1+0.7\xi}{\omega_n}$$

- Czas narastania

$$t_r = \frac{0.8+2.5\xi}{\omega_n} \text{ dla } 0 < \xi < 1 \text{ lub } t_r = \frac{1-0.4167\xi+2.917\xi^2}{\omega_n} \text{ dla } 0 < \xi < 1$$



Wymuszenie	$u(t) = 1(t)$	$u(t) = t*1(t)$	$u(t) = 0.5 t^2*1(t)$
Uchyb ustalony	e_{ss}	e_{sv}	e_{sa}
Układ rzędu „0”	$\frac{1}{1 + Kp}$	∞	∞
Układ rzędu „1”	0	$\frac{1}{Kv}$	∞
Układ rzędu „2”	0	0	$\frac{1}{Ka}$

$$e_{sv} = \frac{1}{K_v} \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} (sG_c(s)G(s))$$



Podstawowe własności kompensatorów „lead”, „lag” oraz „lag-lead”

LEAD

Kompensator „LEAD” - przyspieszający fazę ulepsza charakterystyki przejściowe układów sterowania, nieznacznie zmieniając dokładność statyczną. Układ z tym kompensatorem może wzmocnić efekty związane z szumem wysokoczęstotliwościowym.

LAG

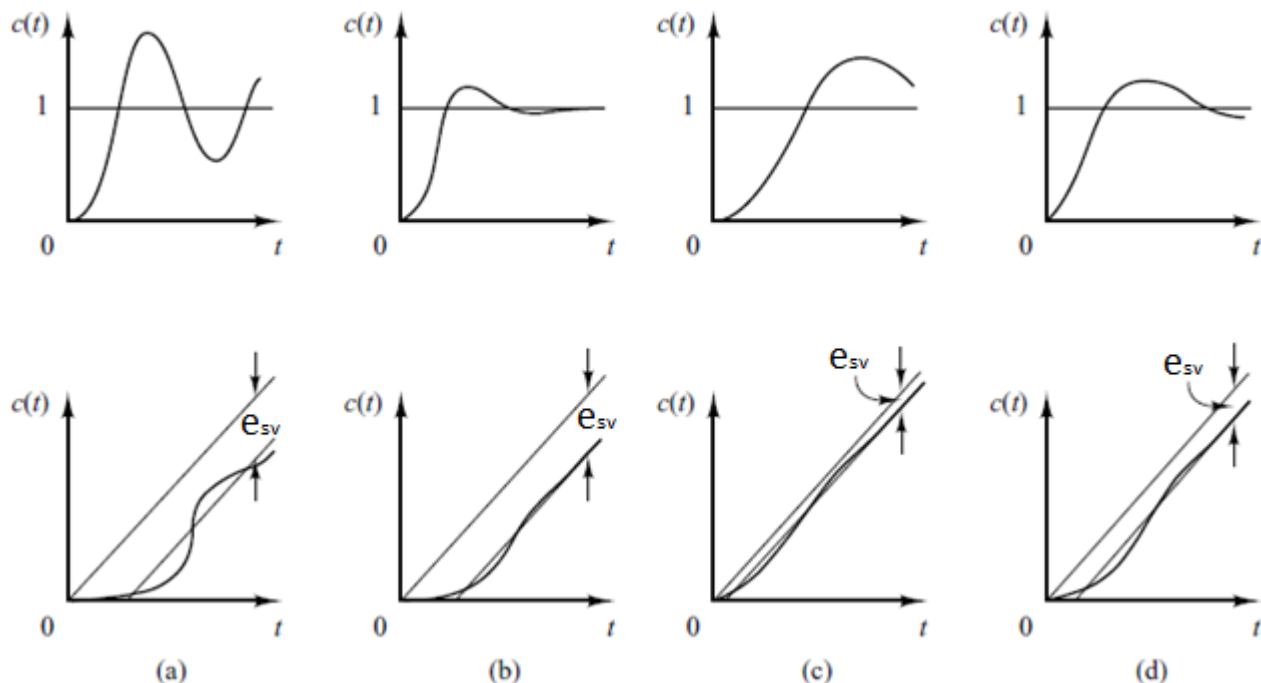
Kompensator „LAG” - opóźniający fazę poprawia dokładność statyczną układu, ale kosztem pogorszenia charakterystyk przejściowych układu. Kompensator opóźniający tłumi szumy niskoczęstotliwościowe.

LAG-LEAD

Kompensator mieszany łączy cechy obu kompensatorów. Użycie „LAG” lub „LEAD” podnosi rząd układu o 1, kompensator mieszany podnosi rząd układu o 2 - układ jest bardziej złożony i trudniej kształtować charakter odpowiedzi przejściowych.



Projektowanie kompensatorów „lead”, „lag” oraz „lag-lead” - odpowiedź skokowa oraz prędkościowa



- (a) Układ przed kompensacją
- (b) Układ regulacji z kompensatorem „lead”
Niższa wartość przeregulowania oraz czasu regulacji. Wyższa wartość uchybu prędkościowego.
- (c) Układ regulacji z kompensatorem „lag”
Wyższa wartość przeregulowania oraz czasu regulacji. Niższa wartość uchybu prędkościowego.
- (d) Układ regulacji z kompensatorem „lag-lead”
Łączy zalety oraz wady obu kompensatorów. Niższa wartość przeregulowania oraz czasu regulacji. Niższa wartość uchybu prędkościowego.

Kompensator z wyprzedzeniem fazy „LEAD”

Podstawową funkcją kompensatora „LEAD” jest zmiana kształtu charakterystyki częstotliwościowej układu skompensowanego, aby **dostarczyć określony zapas fazy**.

Transmitancja operatorowa kompensatora typu „LEAD”:

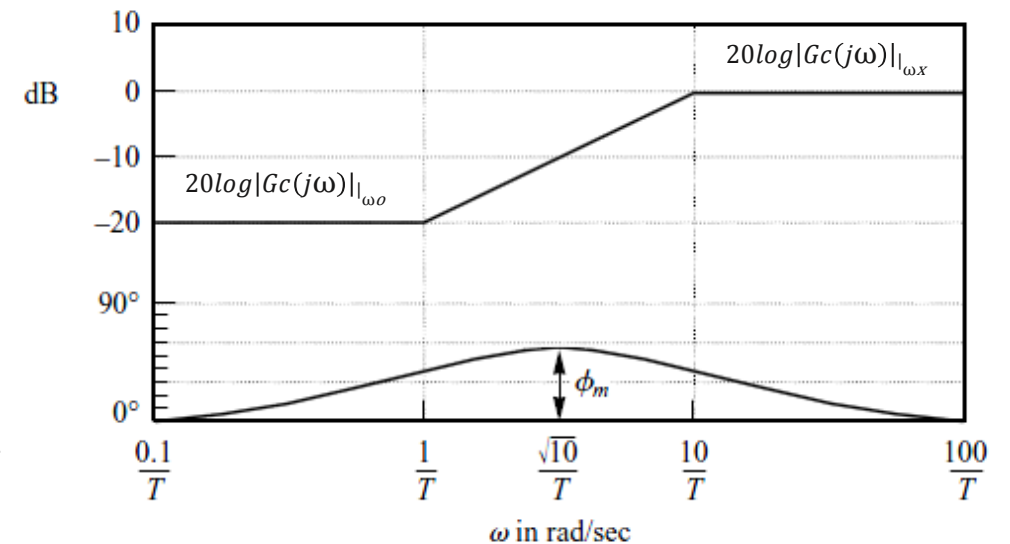
$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} \quad \text{dla } 0 < \alpha < 1$$

Bazując na transmitancji widmowej $G_c(j\omega)$ wyznaczamy charakterystyki Bodego kompensatora typu „LEAD”:

$$L_c(\omega) = 20 \log |G_c(j\omega)| = 20 \log \left| K_c \alpha \frac{Tj\omega + 1}{\alpha Tj\omega + 1} \right|$$

$$\text{Dla } \omega \rightarrow 0: \lim_{\omega \rightarrow 0} L_c(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} 20 \log \left| K_c \alpha \frac{Tj\omega+1}{\alpha Tj\omega+1} \right| = 20 \log K_c + 20 \log \alpha$$

$$\text{Dla } \omega \rightarrow \infty: \lim_{\omega \rightarrow \infty} L_c(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} 20 \log \left| K_c \alpha \frac{Tj\omega+1}{\alpha Tj\omega+1} \right| = 20 \log K_c$$



Charakterystyki Bodego kompensatora typu „LEAD” ($K_c=1$, $\alpha=0,1$):

Częstość związana z zerem kompensatora „lead”: $\omega_o = \frac{1}{T}$

Częstość związana z biegunem kompensatora „lead”: $\omega_x = \frac{1}{\alpha T} = \frac{10}{T}$

ϕ_m jest maksymalnym kątem przesunięcia fazowego, wprowadzonym dla częstości $\omega_m = \sqrt{\omega_o \omega_x} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$

Kompensator z wyprzedzeniem fazy „LEAD”

Podstawowym zadaniem kompensatora typu „LEAD” jest modyfikacja własności układu poprzez **wprowadzenie zera i bieguna kompensatora, aby spełniał pożądane wymagania.**

W przypadku metody linii pierwiastkowych „przemieszczamy” do odpowiednich położeń tzw. bieguny dominujące (para pierwiastków zespolonych leżąca najbliżej osi urojonej, determinująca własności układów wyższych rzędów).

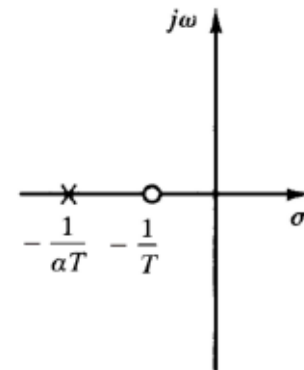
Uwaga: ze względów praktycznych **minimalna wartość parametru α wynosi 0,05, zaś maksymalny kąt 30 stopni.**

Transmitancja operatorowa kompensatora LEAD:

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts+1}{\alpha T s+1} = K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} \quad \text{dla } 0 < \alpha < 1$$

Zero kompensatora „lead”: $s_o = -\frac{1}{T}$

Biegun kompensatora „lead”: $s_x = -\frac{1}{\alpha T}$



Procedura projektowania kompensatora „LEAD”

- 1) Z wymagań dotyczących jakości regulacji, należy określić pożądane położenie dominujących biegunów układu zamkniętego.
- 2) Szkicujemy linie pierwiastkowe układu nieskompensowanego. Sprawdzamy, czy regulacja wzmocnienia może sprowadzić dominujące bieguny układu zamkniętego do pożądanych położzeń. Jeżeli nie, to należy obliczyć deficyt (niedobór) kąta ϕ . Dokładnie taką wartość kąta musi być wprowadzona przez kompensator typu „lead”.
- 3) Należy założyć odpowiednią transmitancję operatorową kompensatora. Wartości współczynnika α oraz stałej czasowej T obliczamy na podstawie wyznaczonego deficytu kąta ϕ . Współczynnik wzmocnienia K obliczamy z wymagań dotyczących dokładności statycznej.
- 4) Określić położenie zera i bieguna kompensatora, aby wprowadzał niezbędny deficyt kąta ϕ . Jeśli nie ma innych wymagań, dobrać wartość α jako największą z możliwych. Duża wartość α powoduje zwiększenie wzmocnienia statycznego prędkościowego.
- 5) Należy określić wzmocnienie układu otwartego skompensowanego z warunku amplitudy.
- 6) Sprawdzić, czy spełnione są wymagania sformułowane w poleceniu. Jeśli nie, procedurę należy powtórzyć lub poprawić.

Przykład 1

Rozważmy układ z jednostkową pętlą sprzężenia zwrotnego. W torze głównym znajduje się element dynamiczny o zadanej transmitancji operatorowej:

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 2)}$$

Za pomocą metody linii pierwiastkowych zaprojektować kompensator typu „lead”, po uwzględnieniu którego, układ będzie spełniał następujące wymagania:

- ✓ współczynnik tłumienia wynosi 0,5,
- ✓ czas regulacji $t_s = 2$ s (zastosować kryterium 2%).





Przykład 1

Korzystamy z wymagań dotyczących współczynnika tłumienia ($\xi = 0.5$) i czasu regulacji ($t_s = 2$ s) odpowiedzi skokowej. Stosujemy kryterium 2%. Bieguny dominujące układu zamkniętego:

$$\omega_n = \frac{4}{\xi \cdot t_s} = 4 \text{ rad/sek}$$

Odpowiada to następującym położeniom biegunów transmitancji układu zamkniętego:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d = -2 \pm j3.464$$

1) Należy ustalić położenie biegunów i zer transmitancji układu otwartego $G(s)H(s)$.

Linie pierwiastkowe rozpoczynają się od biegunów $G(s)H(s)$, a kończą w zerach $G(s)H(s)$ (skończonych, bądź w nieskończoności, $m=0$). Wykres linii pierwiastkowych będzie miał $n=2$ gałęzi. Ponieważ liczba gałęzi wynosi n , to $n-m=2$ gałęzi będzie się kończyło w nieskończonych zerach, wzdłuż wyznaczonych asymptot. Linie pierwiastkowe są symetryczne względem osi rzeczywistej. Na płaszczyźnie zaznaczamy bieguny układu otwartego:

$$s_1 = 0 \text{ oraz } s_2 = -2$$

2) Określić fragmenty linii pierwiastkowych, które leżą na osi rzeczywistej.

Jeśli całkowita liczba zer i biegunów na prawo od punktu testowego jest nieparzysta, to ten punkt należy do linii pierwiastkowej. W naszym przypadku linie pierwiastkowe będą pokrywały się z ujemną częścią osi rzeczywistej dla $\sigma \in (-2 ; 0)$.



3) Wyznaczyć asymptoty linii pierwiastkowych i punkty przecięcia asymptot. Kąty asymptot względem osi rzeczywistej wyznacza się z następującego wzoru:

$$\alpha = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{n-m} \text{ dla } k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

$$\alpha = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{2} = \pm 90^\circ(2k+1) \text{ dla } k = 0, 1, 2, 3 \dots \quad \alpha = \pm 90^\circ, \pm 180^\circ, \dots$$

Wszystkie asymptoty przecinają oś rzeczywistą. Miejsce przecięcia asymptoty z osią rzeczywistą wyznaczamy z zależności:

$$\sigma_\alpha = \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)}{n-m} = \frac{0-2}{2} = -1$$

Lub:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sum \text{biegunów} - \sum \text{zer}}{n-m}$$



Przykład 1. Szkicowanie linii pierwiastkowych

4) Punkty rozgałęzień. Punkty rozgałęzień odpowiadają pierwiastkom wielokrotnym równania charakterystycznego. Wyznaczamy równanie charakterystyczne ($1 + G(s)H(s) = 0$):

$$\frac{K}{s(s+2)} + 1 = 0$$

$$K = -s(s + 2) = -s^2 - 2s$$

$$\frac{dK}{ds} = -2s - 2 = 0$$

$$s_1 = -1$$

Możemy jeszcze sprawdzić, że **jest to faktyczny punkt rozgałęzienia**, licząc wzmocnienie K :

$$K = -s(s + 2) = \text{dla } s_1 = -1$$

$$K(s_1 = -1) = 1$$

Dla rzeczywistych punktów rozgałęzienia, wartość wzmocnienia K musi być rzeczywista, dodatnia ($K \in \mathbb{R} \wedge K > 0$). Punktem rozgałęzienia jest s_1 .



5) Kąt wyjścia i wejścia.

Kąt wyjścia z bieguna wyznaczamy z następującej równości:

$$\theta_d = 180^\circ - \sum \text{kątów od innych biegunów} + \sum \text{kątów od zer}$$

Kąt wejścia do zera wyznaczamy z następującej równości:

$$\theta_d = 180^\circ - \sum \text{kątów od innych zer} + \sum \text{kątów od biegunów}$$

Kąt wyjścia z bieguna wyznaczamy z następującej równości:

$$\theta_d = 180^\circ - \sum(\theta_1 + \theta_2)$$

Kąty wyjścia z biegunów wynoszą 0° oraz 180° .



Przykład 1. Szkicowanie linii pierwiastkowych

6) Punkty przecięcia z osią urojoną. Punkty przecięcia z osią urojoną znajdujemy poprzez zastosowanie kryterium Routha-Hurwitza, bądź poprzez wstawienie wartości $s = j\omega$ do równania charakterystycznego i rozwiązaniu go względem K i ω .

$$\begin{aligned}s^2 + 2s + K &= 0 \\(j\omega)^2 + 2(j\omega) + K &= 0 \\(K - \omega^2) + 2j\omega &= 0 \\ \omega = 0 \quad K = 0\end{aligned}$$

Granica stabilności:

$$K = 0$$

Warunek stabilności:

$$K > 0$$

Częstość, przy których linie pierwiastkowe przecinają oś urojoną wynosi $\omega = \pm 0$ rad/sek, a wzmacnienie w tych punktach wynosi $K = 0$.

Punkty przecięcia z osią urojoną możemy alternatywnie znaleźć poprzez zastosowanie kryterium Routha-Hurwitza.



Przykład 1. Deficyt kąta

Obliczmy deficyt (niedobór) kąta Φ . Transmitancja operatorowa układu otwartego po kompensacji jest równa $G_c(s)G(s)$. Chcemy, aby w układzie skompensowanym był spełniony warunek kąta.

$$\angle G_c(s)G(s) = \pm 180^\circ(2k + 1) \text{ dla } k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

$$\phi = \angle G_c(s) = \pm 180^\circ(2k + 1) - \angle G(s) \text{ dla } s_1$$

Z warunku kąta:

$$\angle G(s) = -\theta_1 - \theta_2 = \pm 180^\circ(2k + 1) \text{ dla } k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Kąty od bieguna dominującego do biegunów układu otwartego wynoszą:

$$\theta_1 = \angle(s_1 - 0) = \angle(-2 + j3.464) = 120^\circ$$

$$\theta_2 = \angle(s_1 + 2) = \angle(j3.464) = \angle(j3.464) = 90^\circ$$

$$\angle G(s_1) = -\theta_1 - \theta_2 = -210^\circ$$

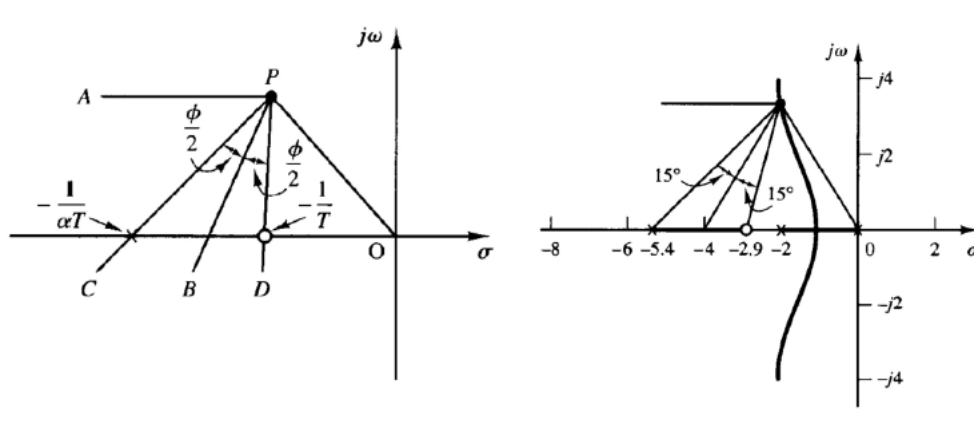
$$\phi = \angle G_c(s_1) = \pm 180^\circ(2k + 1) - \angle G(s_1) \text{ dla } k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

$$\phi = -180^\circ + 210^\circ = 30^\circ$$

Widzimy, że kompensator musi wprowadzić brakujący kąt wynoszący $\Phi = 30^\circ$. Następnym krokiem jest określenie położenia zera i bieguna kompensatora przyspieszającego. Istnieje wiele możliwości wyboru takich położenia. Zaprezentowana zostanie graficzna procedura wyboru położenia zera i bieguna kompensatora, celem zapewnienia największego współczynnika α .

Graficzna procedura wyboru położenia zera i bieguna kompensatora w celu zapewnienia największej wartości współczynnika α :

- ✓ Rysujemy poziomą półprostą, przechodzącą przez pożądaną, dominujący biegun układu zamkniętego (punkt P) - powstaje półprosta PA .
- ✓ Rysujemy odcinek łączący punkt P i początek układu współrzędnych - PO .
- ✓ Rysujemy dwusieczną kąta $\angle APO$, otrzymując półprostą PB .
- ✓ Rysujemy półproste PC i PD , które tworzą kąt $\pm \phi/2$ z dwusieczną.
- ✓ Punkty C i D wskazują odpowiednio biegun i zero kompensatora przyspieszającego.





Przykład 1. Deficyt kąta – dobór zera i bieguna kompensatora „LEAD”

Kompensator musi wprowadzić kąt $\Phi = 30^\circ$. Z rysunku odczytujemy położenie zera i bieguna kompensatora i wyznaczamy wartość stałej czasowej T oraz współczynnika α . Zakładamy, że wzmacnienie kompensatora $K_c = 1$. Przyjmujemy położenie zera kompensatora:

$$z = -1$$

Obliczamy położenie bieguna (lub odczytujemy z wykresu)

$$p \approx -2,89$$

Transmitancja kompensatora dla $K_c = 1$ ma następującą postać:

$$G_c(s) = \frac{s+1}{s+2,89}$$

Wzmocnienie układu jest wyznaczane z warunku modułu, w wyznaczonym biegunie dominującym układu skompensowanego $K \approx 6.5$.

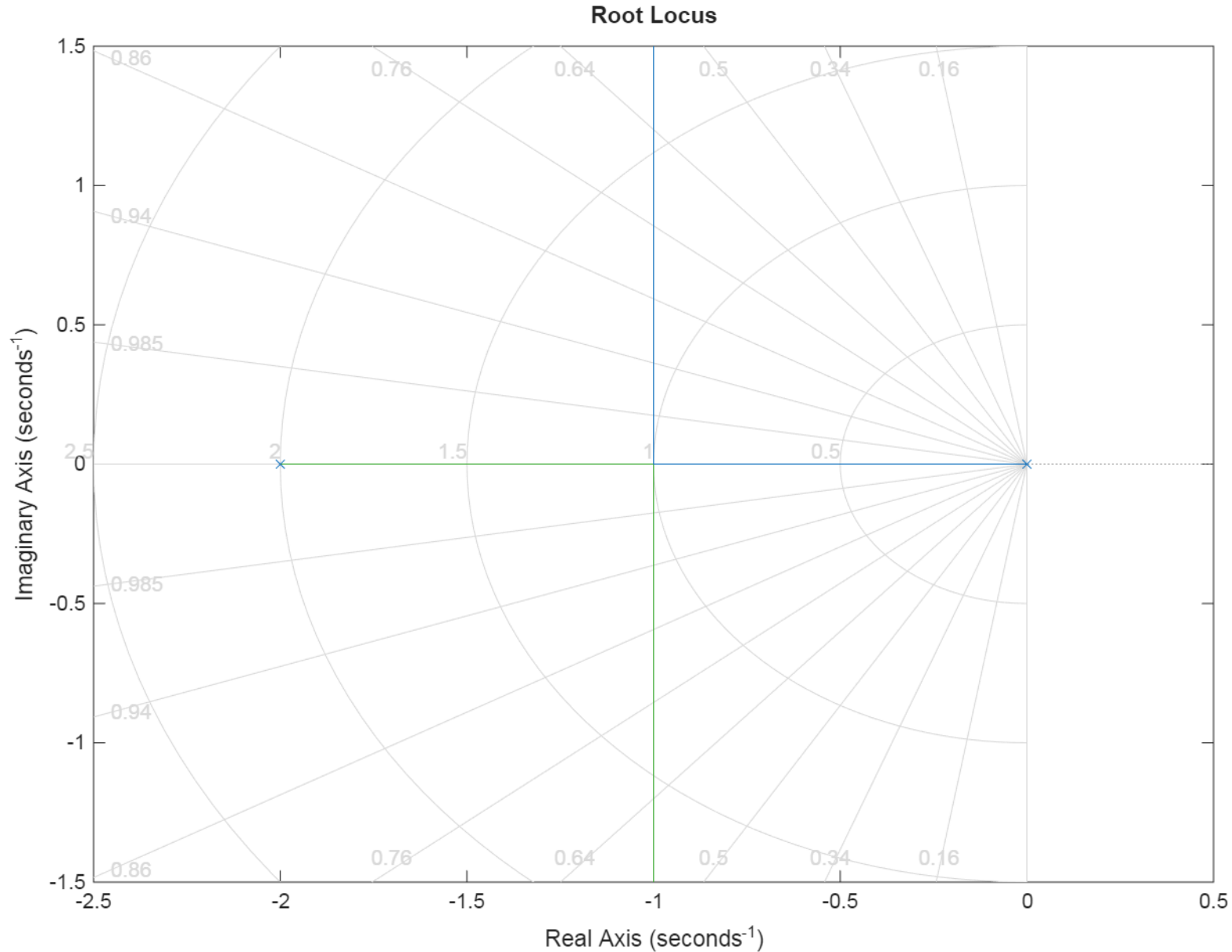
$$G_c(s)G(s) = \frac{s+1}{s+2,89} \frac{6,5}{s(s+2)}$$

Uwaga: Warto przeprowadzić ćwiczenie polegające na innym dobraniu położenia bieguna i zera kompensatora. Należy wyznaczyć wartość współczynnika α , wartość stałej błędu prędkościowego K_v oraz porównać uzyskane wyniki.



MATLAB – Przykład 1 – Linie pierwiastkowe układu nieskompensowanego – rlocus(G(s))

```
clear;  
clc;  
close all;  
G = tf(1,[1 2 0]);  
rlocus(G);  
grid on;
```





MATLAB – Przykład 1 – Linie pierwiastkowe układu nieskompensowanego – rlocus($G_c(s)G(s)$)

```
clear; clc; close all;
```

```
G = tf(1,[1 2 0]);
```

```
Gc = tf([1 1],[1 2.89]);
```

```
K = 6.5;
```

```
G_open = K*Gc*G;
```

```
G_cl = feedback(G_open,1);
```

```
figure;
```

```
rlocus(Gc*G);
```

```
hold on;
```

```
plot(-2,3.464,'ro','LineWidth',2);
```

```
plot(-2,-3.464,'ro','LineWidth',2);
```

```
grid on;
```

```
title('Root Locus z kompensatorem lead');
```

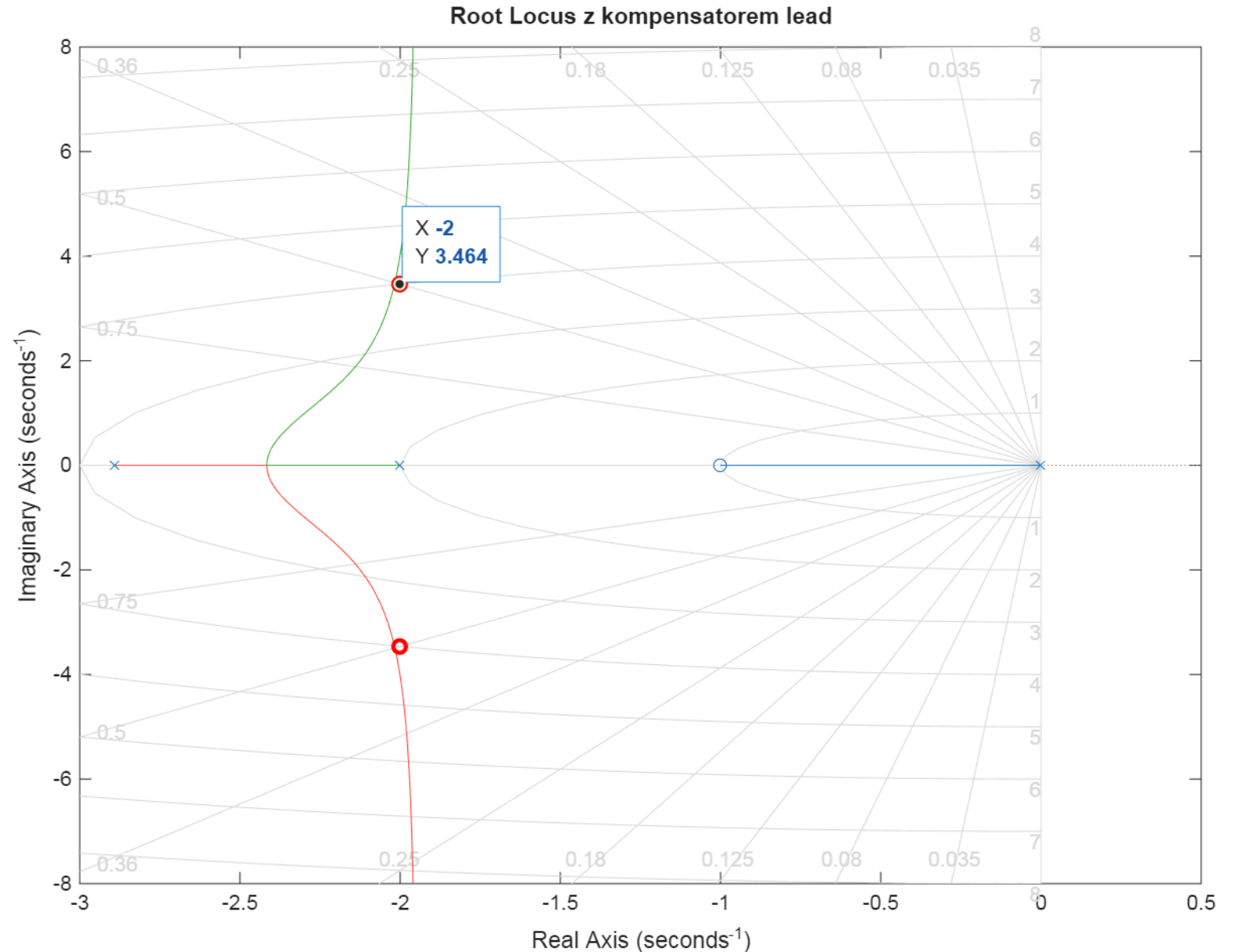
```
figure;
```

```
step(G_cl);
```

```
grid on;
```

```
title('Odpowiedź skokowa');
```

```
stepinfo(G_cl)
```





MATLAB – Przykład 1 – Linie pierwiastkowe układu nieskompensowanego – rlocus(G)

```
%% =====  
% PROJEKT KOMPENSATORA LEAD – ROOT LOCUS  
% Przykład:  $G(s)=1/(s(s+2))$   
% Wymagania:  $\zeta=0.5$ ,  $T_s=2s$   
% =====  
  
clear; clc; close all;  
  
%% 1. OBIEKT  
G = tf(1,[1 2 0]); %  $1/(s(s+2))$   
  
%% 2. PARAMETRY PROJEKTOWE  
zeta = 0.5;  
Ts = 2;  
  
wn = 4/(zeta*Ts);  
sigma = -zeta*wn;  
wd = wn*sqrt(1-zeta^2);  
  
s_des = sigma + 1j*wd;  
  
fprintf('Biegun docelowy: %.3f + j%.3f\n', real(s_des), imag(s_des));  
  
%% Biegun docelowy: -2.000 + j3.464
```



MATLAB – Przykład 1 – Linie pierwiastkowe układu nieskompensowanego – rlocus(G)

```
%% 3. KOMPENSATOR LEAD (z obliczeń ręcznych)
```

```
z = -1;
```

```
p = -2.89;
```

```
Gc = tf([1 -z],[1 -p]);
```

```
%% 4. DOBÓR WZMOCNIENIA K
```

```
G_open = Gc * G;
```

```
K = 1 / abs(evalfr(G_open, s_des));
```

```
fprintf('Wzmocnienie K: %.3f\n', K);
```

```
%% 5. UKŁAD ZAMKNIĘTY
```

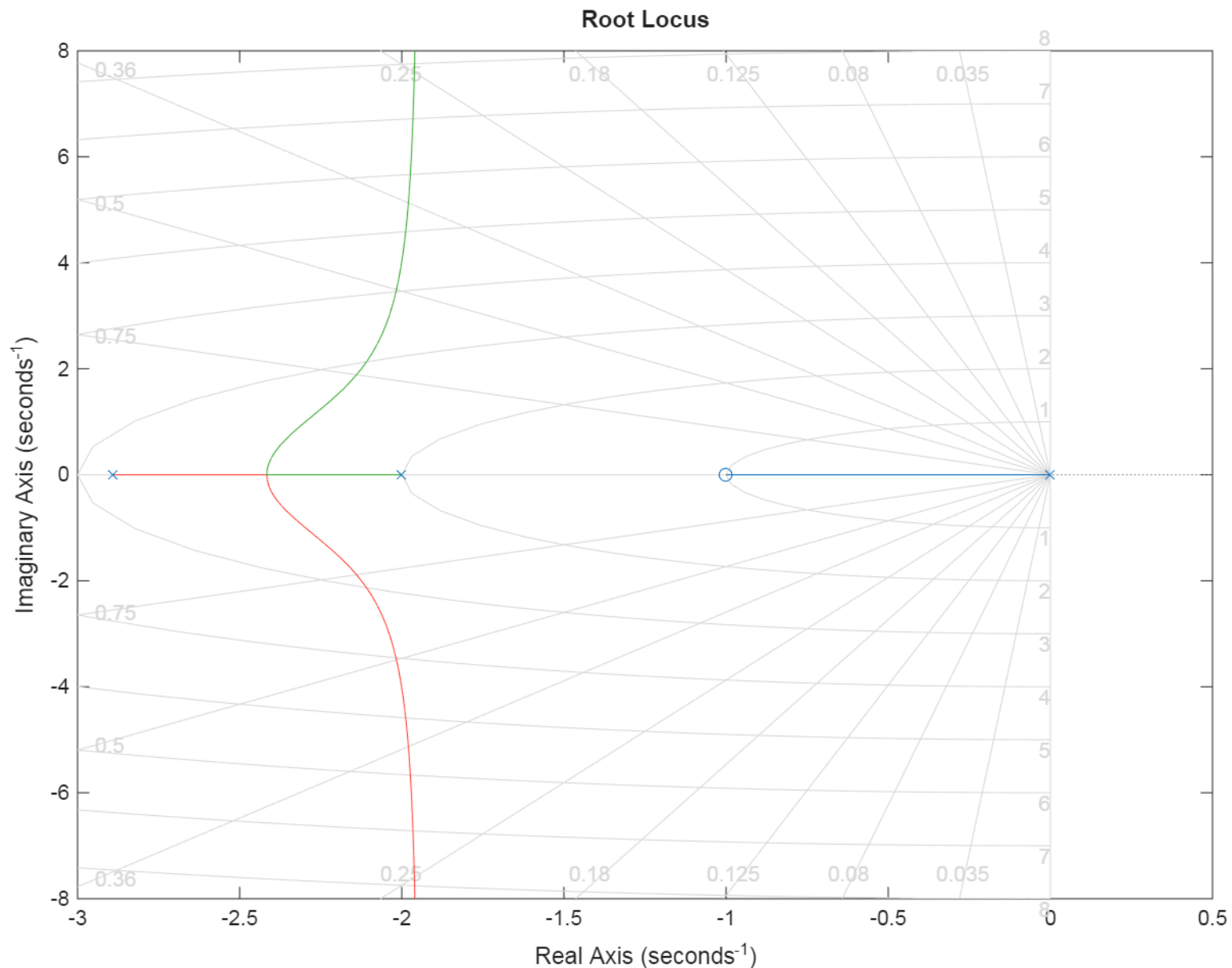
```
G_cl = feedback(K*G_open,1);
```

```
%% 6. ROOT LOCUS
```

```
figure;
```

```
rlocus(Gc*G);
```

```
hold on;
```





MATLAB – Przykład 1 – Linie pierwiastkowe układu nieskompensowanego – rlocus(G)

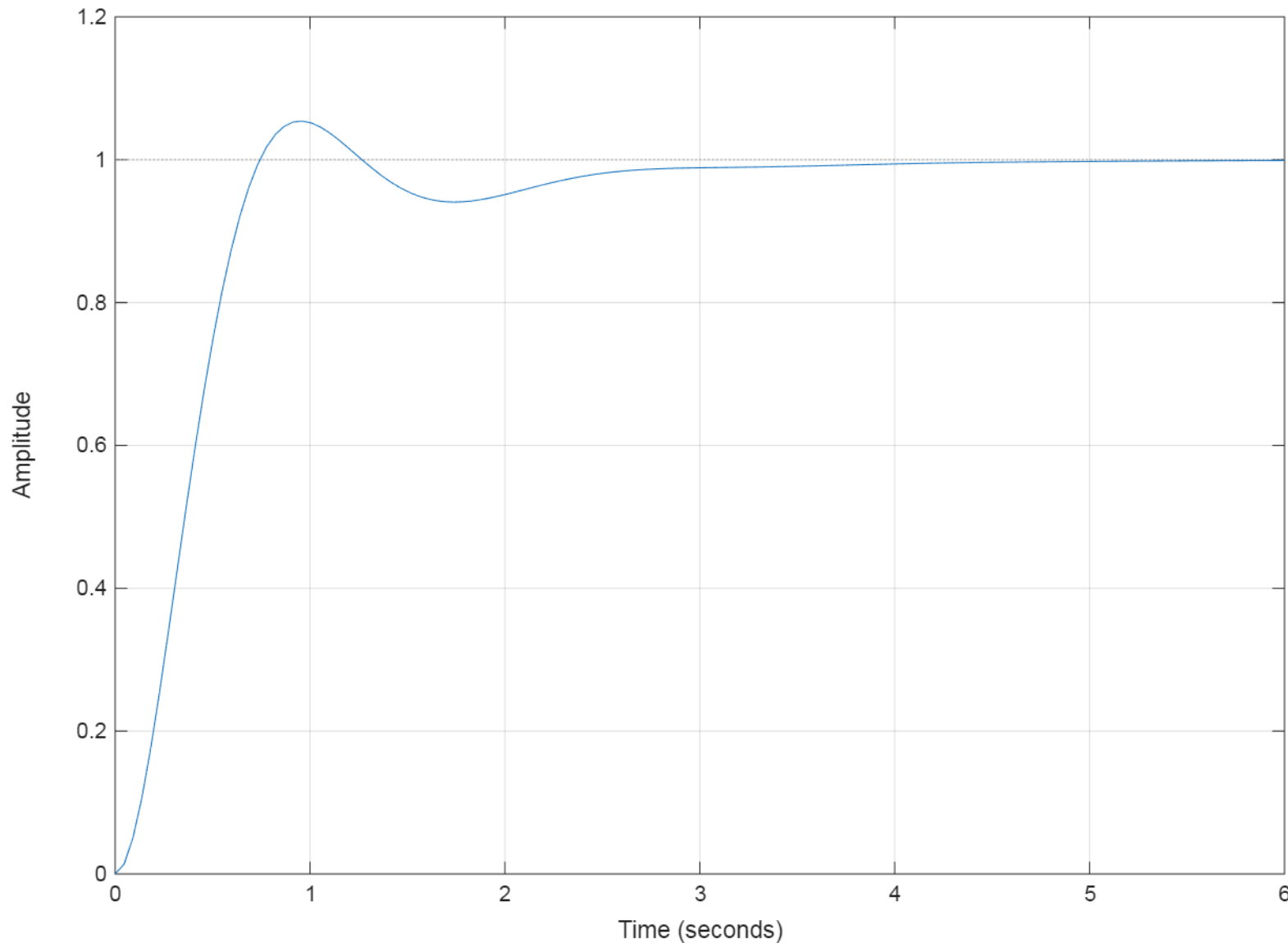
```
% bieguny docelowe  
plot(real(s_des), imag(s_des), 'ro','LineWidth',2);  
plot(real(s_des), -imag(s_des), 'ro','LineWidth',2);  
grid on;  
title('Root Locus z kompensatorem LEAD');
```

```
%% 7. ODPOWIEDŹ SKOKOWA  
figure;  
step(G_cl);  
grid on;  
title('Odpowiedź skokowa');
```

```
%% 8. PARAMETRY  
info = stepinfo(G_cl);  
disp('--- PARAMETRY DYNAMICZNE ---');  
disp(info);
```

```
%% 9. BIEGUNY UKŁADU  
disp('--- Bieguny układu zamkniętego ---');  
disp(pole(G_cl));  
%% --- Bieguny układu zamkniętego ---  
-2.0175 + 3.4648i  
-2.0175 - 3.4648i  
-0.8551 + 0.0000i
```

Odpowiedź skokowa



Przykład 2

Sterowanie robotem do prac podwodnych odbywa się w układzie z jednostkową pętlą sprzężenia zwrotnego. W torze głównym znajduje się obiekt trzeciego rzędu o transmitancji operatorowej:

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 10)(s + 50)}$$

Za pomocą metody linii pierwiastkowych zaprojektować kompensator „lead”, po uwzględnieniu którego, układ będzie spełniał następujące kryteria jakości sterowania:

- ✓ przeregulowanie $M_p = 7.5\%$ (dla wymuszenia skokiem jednostkowym),
- ✓ czas regulacji $t_s = 400$ ms (zastosować kryterium 2%).

Określić wartość stałej wzmocnienia statycznego prędkościowego K_v układu skompensowanego. Transmitancja operatorowa elementu dynamicznego w pętli sprzężenia zwrotnego $H(s)$ wynosi 1.





Przykład 2

Rozważmy następujący przykład transmitancji operatorowej układu otwartego:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+10)(s+50)}, \quad H(s)=1$$

1) Warunek kąta:

$$\angle G(s)H(s) = \angle \frac{K}{s(s+10)(s+50)} = -\angle s - \angle (s+10) - \angle (s+50) = \mp 180^\circ(2k+1) \text{ dla } k = 0,1,2,3 \dots$$

2) Warunek modułu:

$$|G(s)H(s)| = \left| \frac{K}{s(s+10)(s+50)} \right| = 1$$



Przykład 2

Przekształcamy warunki na przeregulowanie i czas regulacji na warunki względem współczynnika tłumienia i częstości drgań własnych:

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0.075 \quad \rightarrow \quad \xi = \sqrt{\frac{(\ln M_p)^2}{\pi^2 + (\ln M_p)^2}} = 0.6362$$

W przypadku kryterium 2% mamy:

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 0.4 \text{ sek} \quad \rightarrow \quad \omega_n = \frac{4}{\xi t_s} = 15.7194 \frac{\text{rad}}{\text{sek}}$$

Bieguny dominujące układu zamkniętego muszą być położone na prostych, które tworzą kąt:

$\theta = \arcsin(\xi) = \arcsin(0.6362) = \pm 39.5058^\circ$ z osią urojoną. W przykładzie mamy $\xi = 0.6362$, $\omega_n = 15.7194$ rad/sek. Odpowiada to następującym położeniom biegunów transmitancji układu zamkniętego:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -10 \pm j12.1285$$



Przykład 2. Szkicowanie linii pierwiastkowych

1) Należy ustalić położenie biegunów i zer transmitancji układu otwartego $G(s)H(s)$.

Linie pierwiastkowe rozpoczynają się od biegunów $G(s)H(s)$, a kończą w zerach $G(s)H(s)$ (skończonych, bądź w nieskończoności, $m=0$). Wykres linii pierwiastkowych będzie miał $n=3$ gałęzi. Ponieważ liczba gałęzi wynosi n , to $n-m=3$ gałęzi będzie się kończyło w nieskończonych zerach, wzdłuż wyznaczonych asymptot. Linie pierwiastkowe są symetryczne względem osi rzeczywistej.

Na płaszczyźnie zaznaczamy bieguny układu otwartego:

$$s_1 = 0 \text{ oraz } s_2 = -10 \text{ i } s_3 = -50$$

2) Określić fragmenty linii pierwiastkowych, które leżą na osi rzeczywistej.

Jeśli całkowita liczba zer i biegunów na prawo od punktu testowego jest nieparzysta, to ten punkt należy do linii pierwiastkowej. W naszym przypadku linie pierwiastkowe będą pokrywały się z ujemną częścią osi rzeczywistej ($\sigma \in (-\infty; -50) \wedge (-10; 0)$).



3) Wyznaczyć asymptoty linii pierwiastkowych i punkty przecięcia asymptot. Kąty asymptot względem osi rzeczywistej wyznacza się z następującego wzoru:

$$\alpha = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{n-m} \text{ dla } k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

$$\alpha = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{3} = \pm 60^\circ(2k+1) \text{ dla } k = 0, 1, 2, 3 \dots \quad \alpha = \pm 60^\circ, \pm 180^\circ$$

Wszystkie asymptoty przecinają oś rzeczywistą. Miejsce przecięcia asymptoty z osią rzeczywistą wyznaczamy z zależności:

$$\sigma_\alpha = \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)}{n-m} = \frac{0 - 10 - 50}{3} = -20$$

Lub:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sum \text{biegunów} - \sum \text{zer}}{n-m}$$



Przykład 2. Szkicowanie linii pierwiastkowych

4) Punkty rozgałęzień. Punkty rozgałęzień odpowiadają pierwiastkom wielokrotnym równania charakterystycznego. Wyznaczamy równanie charakterystyczne ($1 + G(s)H(s) = 0$):

$$\frac{K}{s(s+10)(s+50)} + 1 = 0$$

$$K = -s(s + 10)(s + 50) = -s^3 - 60s^2 - 500s$$

$$\frac{dK}{ds} = -3s^2 - 120s - 500$$

$$s_1 = -35,2753$$

$$s_2 = -4,7247$$

Możemy jeszcze sprawdzić, że **nie są to punkty rozgałęzień**, licząc wzmocnienie K:

$$K = -s(s^2 + 6s + 25) \text{ dla } s_1 = -35,2753$$

$$K(s_1 = -35,2753) = -13128,5$$

$$K(s_2 = -4,7247) = 1128,5$$

Dla rzeczywistych punktów rozgałęzienia, wartość wzmocnienia K musi być rzeczywista, dodatnia ($K \in \mathbb{R} \wedge K > 0$). Punktem rozgałęzienia jest s_2 . Odrzucamy s_1 .



5) Kąt wyjścia i wejścia.

Kąt wyjścia z bieguna wyznaczamy z następującej równości:

$$\theta_d = 180^\circ - \sum \text{kątów od innych biegunów} + \sum \text{kątów od zer}$$

Kąt wejścia do zera wyznaczamy z następującej równości:

$$\theta_d = 180^\circ - \sum \text{kątów od innych zer} + \sum \text{kątów od biegunów}$$

Kąt wyjścia z bieguna wyznaczamy z następującej równości:

$$\theta_d = 180^\circ - \sum(\theta_1 + \theta_2)$$

Kąty wyjścia z bieguna wynoszą 0° oraz 180° .



Przykład 2. Szkicowanie linii pierwiastkowych

6) Punkty przecięcia z osią urojoną. Punkty przecięcia z osią urojoną znajdujemy poprzez zastosowanie kryterium Routha-Hurwitza, bądź poprzez wstawienie wartości $s = j\omega$ do równania charakterystycznego i rozwiązaniu go względem K i ω .

$$(j\omega)^3 + 60(j\omega)^2 + 500j\omega + K = 0$$

$$(K - 60\omega^2) + j\omega(500 - \omega^2) = 0$$

$$K - 60\omega^2 = 0 \quad \text{i} \quad \omega(500 - \omega^2) = 0$$

$$\omega = 0, \quad K = 0 \quad \text{lub} \quad \omega = \pm\sqrt{500} \approx \pm 22.3606, \quad K = 30000$$

Częstości, przy których linie pierwiastkowe przecinają oś urojoną wynoszą $\omega = \pm 22,3606$ rad/sek, a wzmacnienie w tych punktach wynosi $K_{kr} = 3000$. Okres oscylacji wynosi:

$$T_{ocs} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Punkty przecięcia z osią urojoną możemy alternatywnie znaleźć poprzez zastosowanie kryterium Routha-Hurwitza.



Przykład 2. Deficyt kąta

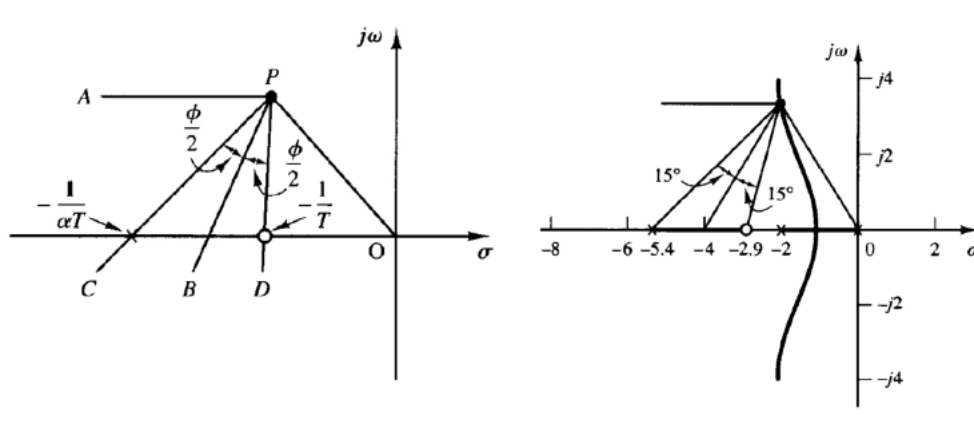
Obliczmy deficyt (niedobór) kąta Φ . Transmitancja układu otwartego po kompensacji jest równa $G_c(s)G(s)$. Chcemy, aby w układzie skompensowanym był spełniony warunek kąta.

$$\begin{aligned}\angle(G_c(s)G(s)) &= \pm 180^\circ(2k + 1) \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, \dots \\ \phi = \angle(G_c(s)) &= \pm 180^\circ(2k + 1) - \angle(G(s)) \quad \text{dla } s = -10 \pm j12.1285 \\ \angle\left(\frac{K}{s(s + 10)(s + 50)}\right)_{s=-10+j12.1285} &= \angle(-4412.98 - j6635.47) = -123.62^\circ \\ \phi &= 180^\circ - 123.62^\circ = 56.37^\circ\end{aligned}$$

Widzimy, że kompensator musi wprowadzić kąt $\Phi = 56,37^\circ$. Następnym krokiem jest określenie położenia zera i bieguna kompensatora przyspieszającego. Istnieje wiele możliwości wyboru takich położzeń. Zaprezentowana zostanie graficzna procedura wyboru położzeń zera i bieguna kompensatora, celem zapewnienia największego współczynnika α .

Graficzna procedura wyboru położenia zera i bieguna kompensatora w celu zapewnienia największej wartości współczynnika α :

- ✓ Rysujemy poziomą półprostą, przechodzącą przez pożądaną, dominujący biegun układu zamkniętego (punkt P) - powstaje półprosta PA .
- ✓ Rysujemy odcinek łączący punkt P i początek układu współrzędnych - PO .
- ✓ Rysujemy dwusieczną kąta $\angle APO$, otrzymując półprostą PB .
- ✓ Rysujemy półproste PC i PD , które tworzą kąt $\pm \phi/2$ z dwusieczną.
- ✓ Punkty C i D wskazują odpowiednio biegun i zero kompensatora przyspieszającego.





Przykład 2. Deficyt kąta – dobór zera i bieguna kompensatora „LEAD”

Kompensator musi wprowadzić kąt $\Phi = 56,37^\circ$. Z rysunku odczytujemy położenie zera i bieguna kompensatora i wyznaczamy wartość stałej czasowej T oraz współczynnika α . Zakładamy, że wzmacnienie kompensatora $K_c = 1$.

$$s_o = -10, \quad \text{oraz} \quad s_x = -28$$

$$T = \frac{1}{10} = 0.1 \quad \text{oraz} \quad \alpha T = \frac{1}{28} = 0.0357 \Rightarrow \alpha = 0.357$$

Transmitancja układu otwartego, skompensowanego ma następującą postać:

$$G_c(s)G(s) = \frac{s + 10}{s + 28} \cdot \frac{K}{s(s + 10)(s + 50)} = \frac{K(s + 10)}{s(s + 10)(s + 28)(s + 50)}$$

Wzmocnienie układu jest wyznaczone z warunku modułu, w wyznaczonym biegunie dominującym układu skompensowanego $s = -10 + j12.1285$:

$$\left| \frac{K}{s(s + 28)(s + 50)} \right|_{s=-10+j12.1285} = 1$$

$$K = 14261.1$$



Przykład 2. Sprawdzenie - współczynnik wzmocnienia prędkościowego

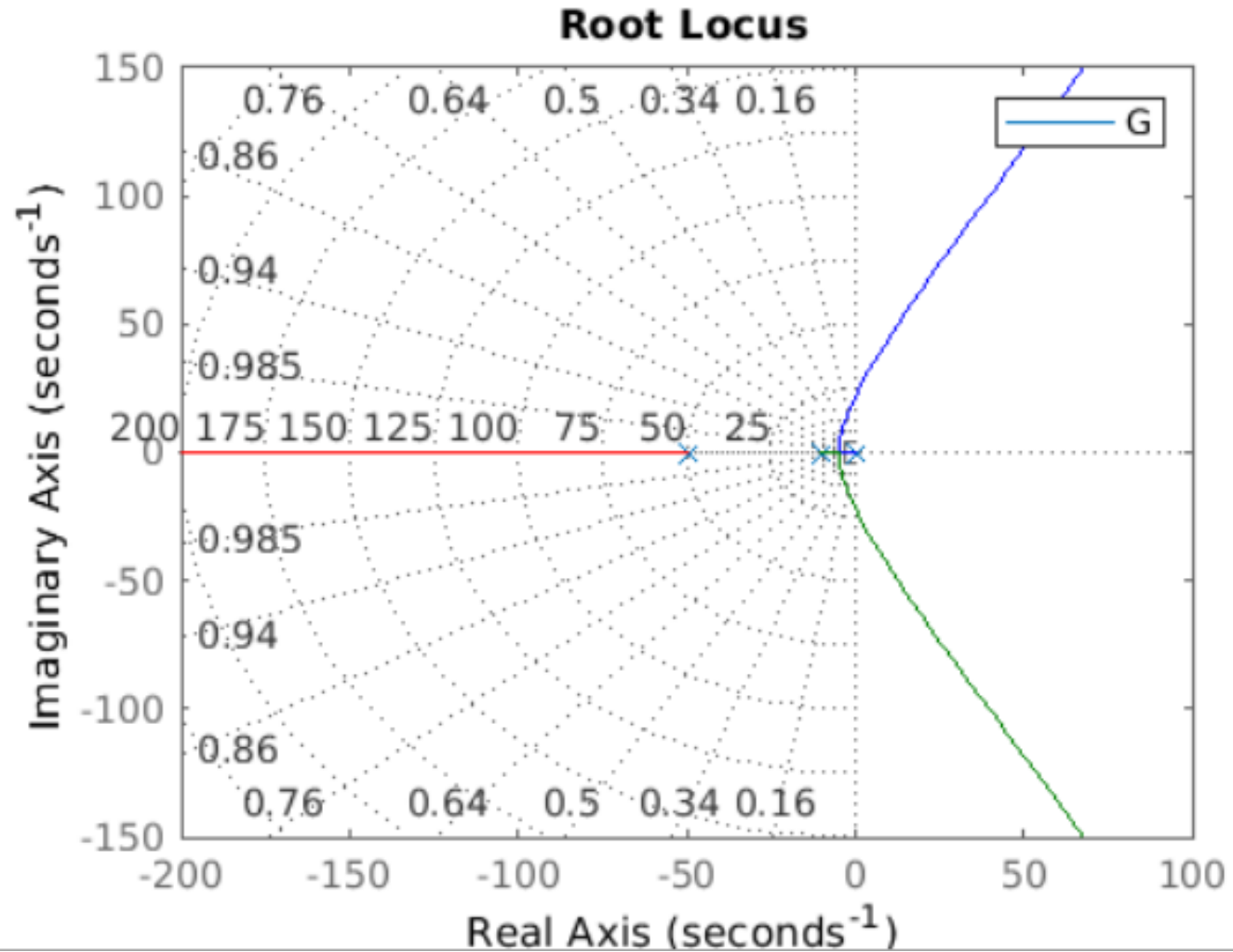
Współczynnik wzmocnienia prędkościowego układu skompensowanego wyznaczmy ze wzoru:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{14261.1s(s+10)}{s(s+10)(s+28)(s+50)} = 10.19 \frac{1}{sek}$$

Uwaga: Warto przeprowadzić ćwiczenie polegające na innym dobraniu położenia bieguna i zera kompensatora (np. umieścić zero w $s = -15$). Należy wyznaczyć nową wartość współczynnika α , wartość stałej błędów prędkościowych K_v oraz porównać uzyskane wyniki.

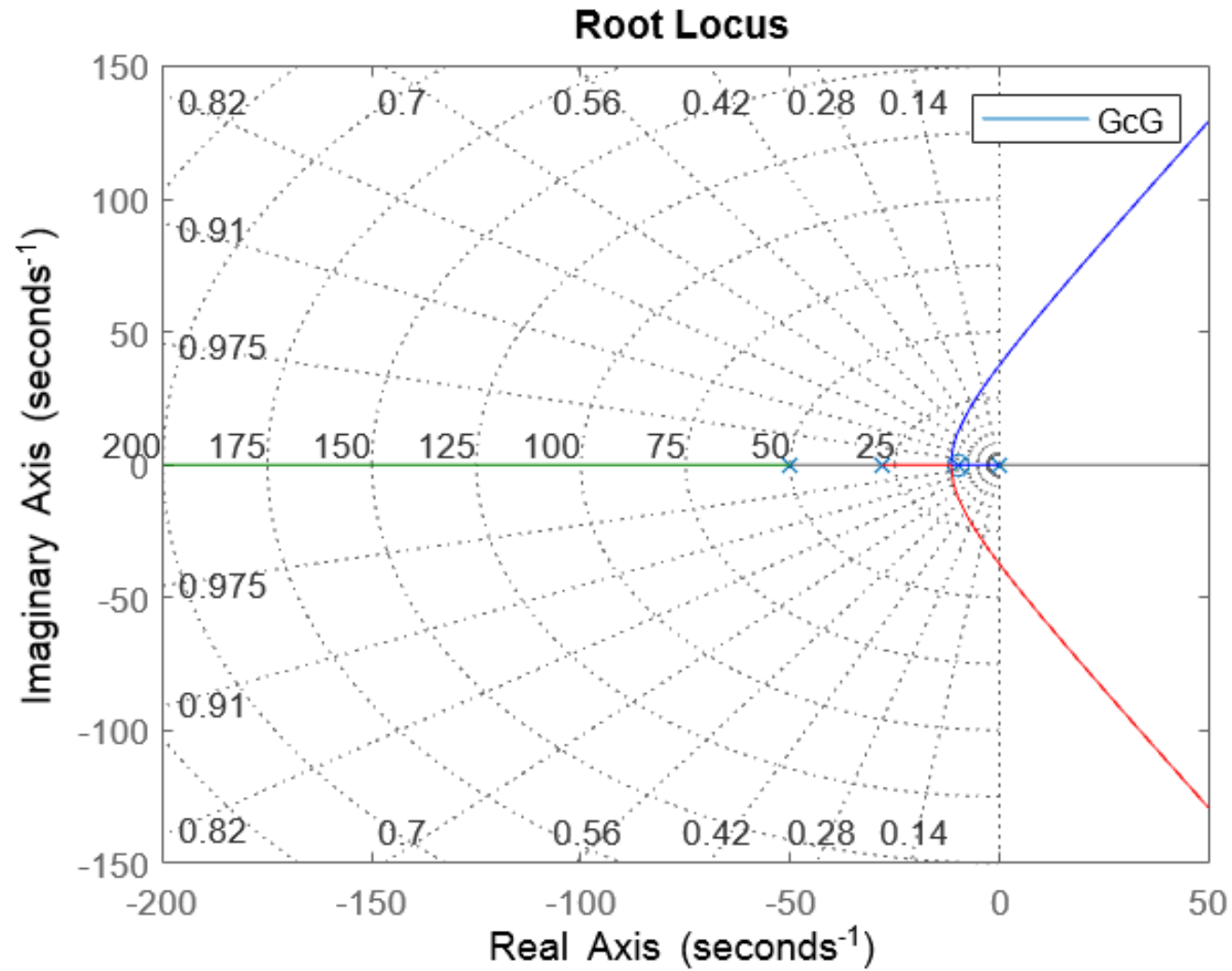


MATLAB – Przykład 2 – Linie pierwiastkowe układu nieskompensowanego – rlocus(G)



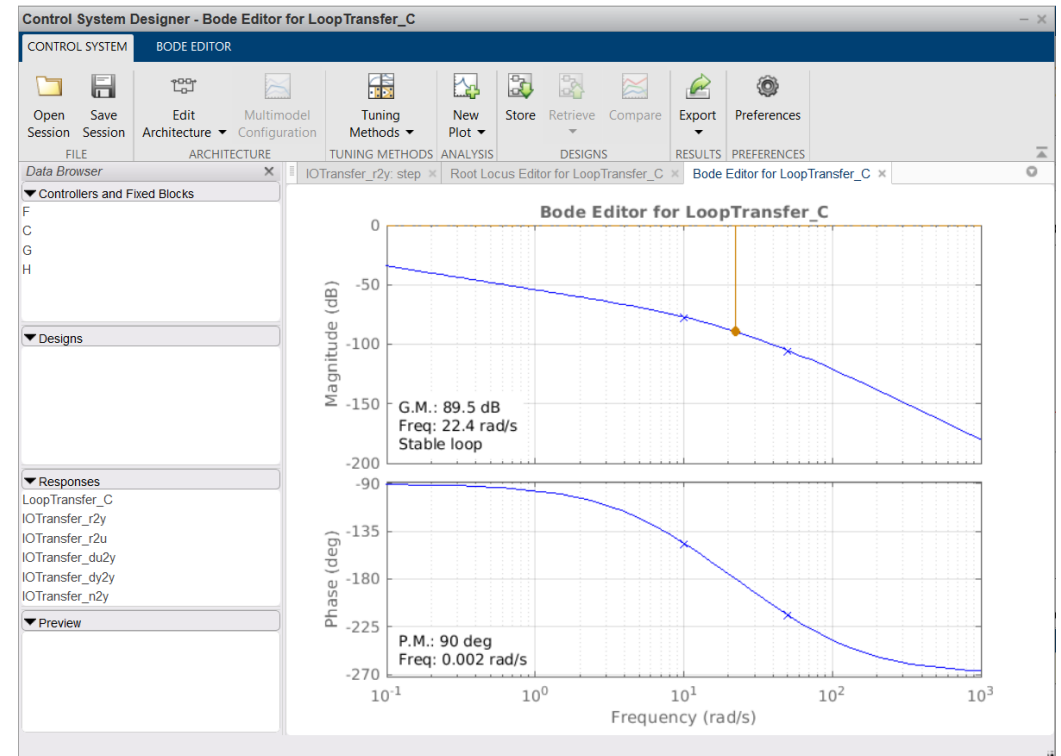
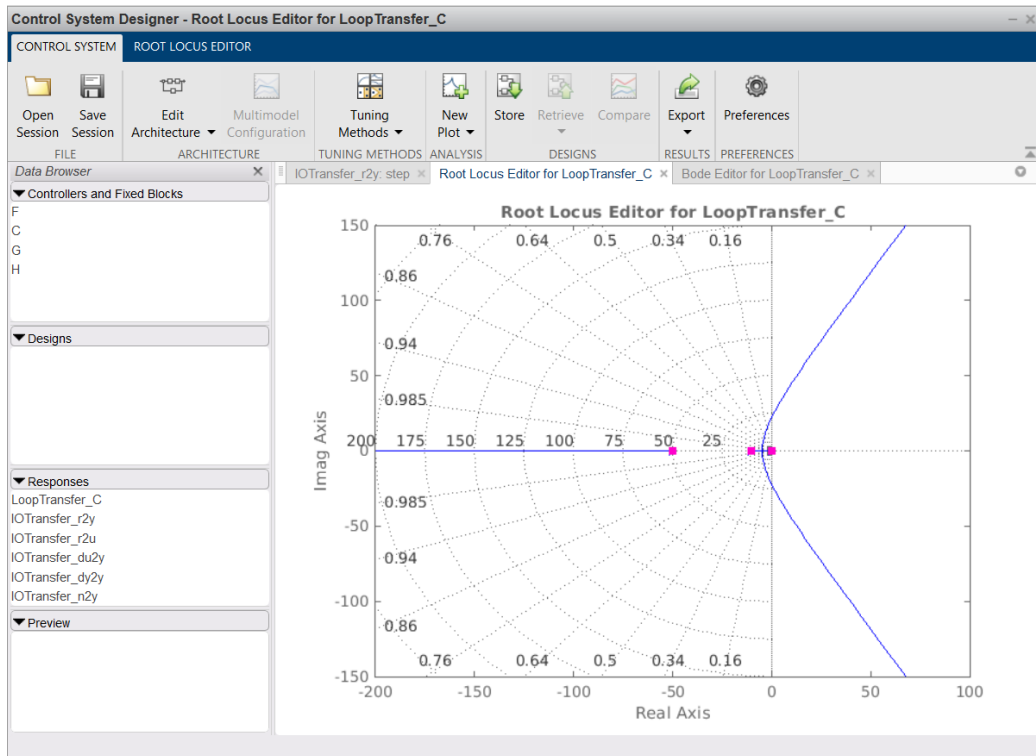


MATLAB – Przykład 2 – Linie pierwiastkowe układu skompensowanego - rlocus(GcG)



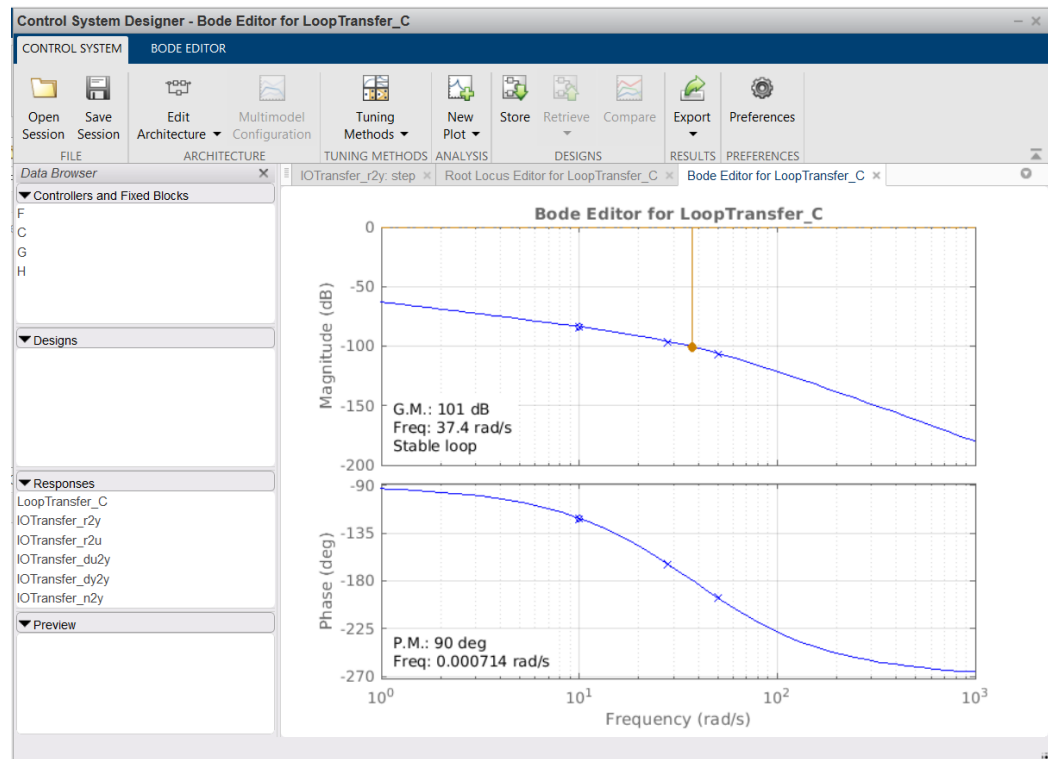
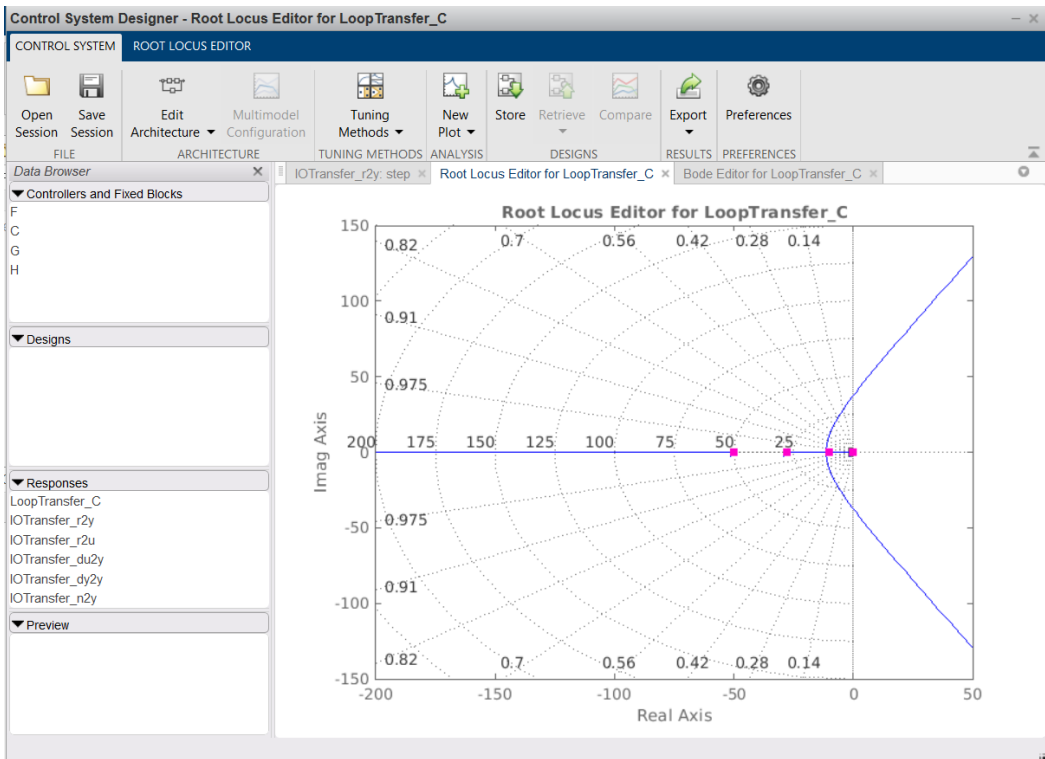


MATLAB – Przykład 2 – sisotool(G)



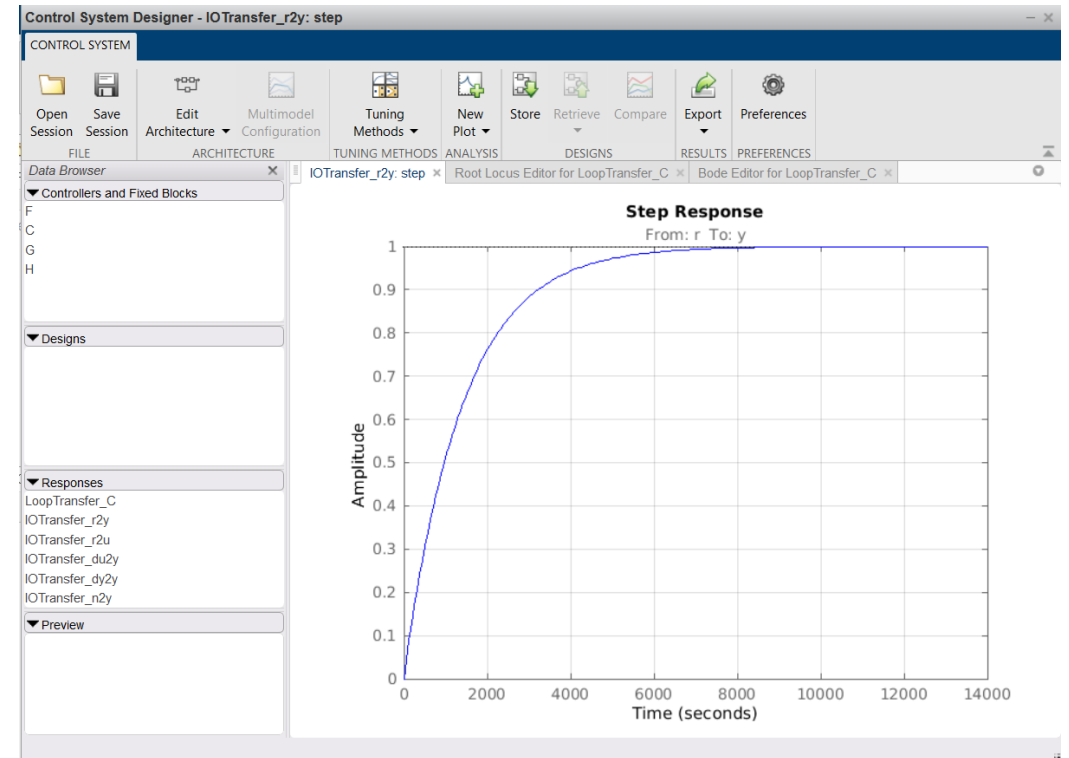
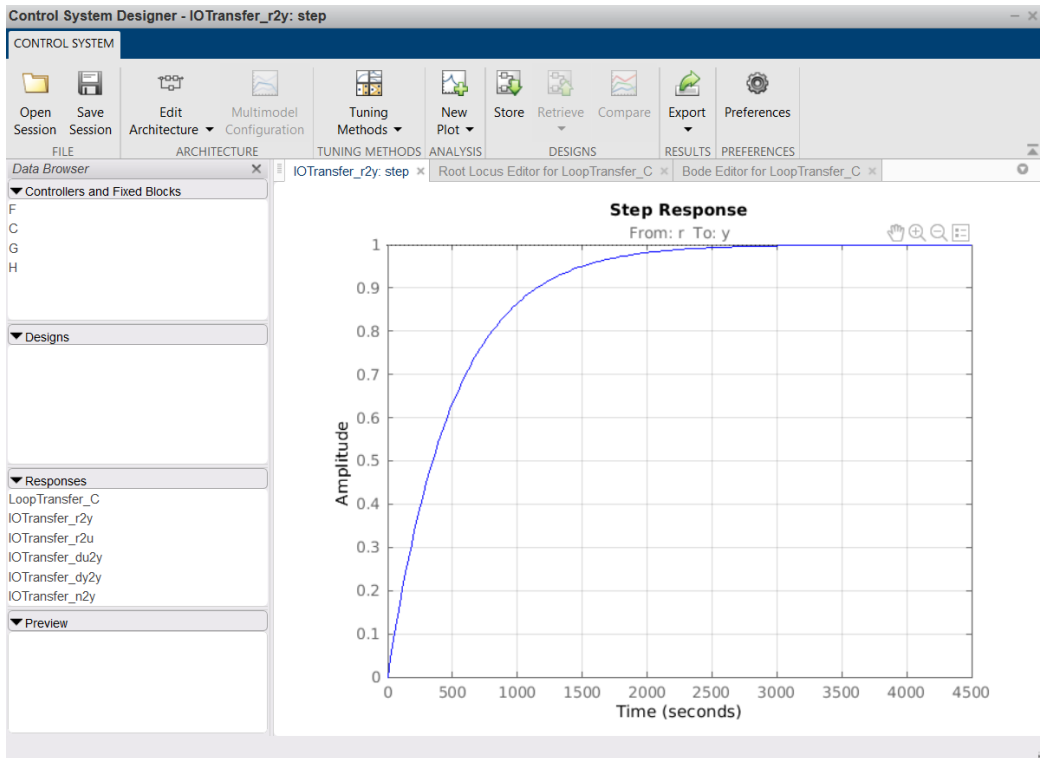


MATLAB – Przykład 2 – sisotool(GcG)





MATLAB – Przykład 2 – sisotool(G) vs sisotool(GcG)



Przykład 3

Sterowanie obiektem odbywa się w układzie z jednostkową, ujemną pętlą sprzężenia zwrotnego. W torze głównym znajduje się obiekt trzeciego rzędu o transmitancji operatorowej wynoszącej $G(s) = \frac{K}{(s+2)^2(s+4)}$.

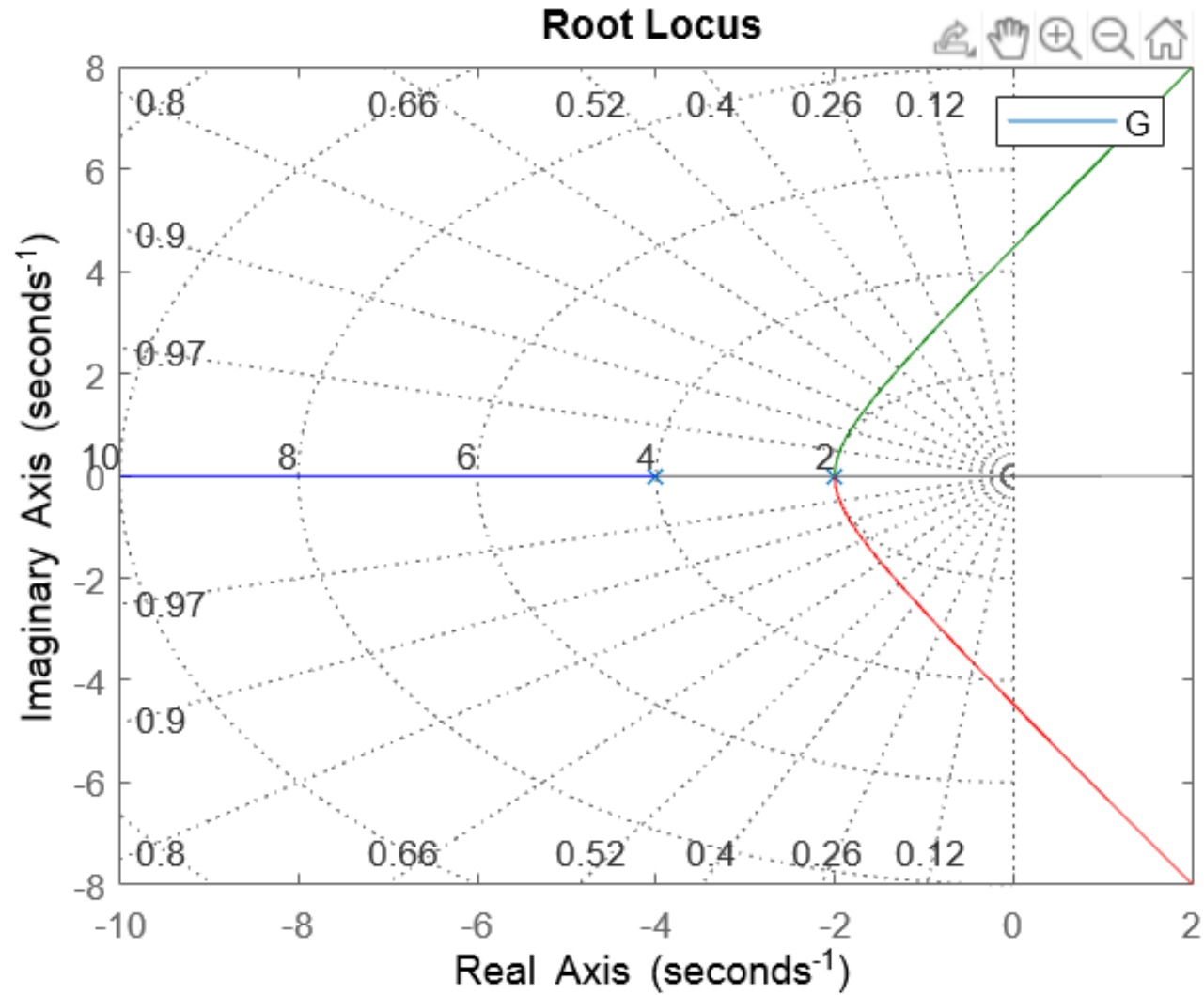
Zakładamy, że wzmacnienie $K > 0$. Należy:

1. Naszkicować linie pierwiastkowe układu przed kompensacją.
2. Za pomocą metody linii pierwiastkowych zaprojektować kompensator przyspieszający fazę „lead”, po uwzględnieniu którego, układ będzie miał przeregulowanie $M_p = 0.37233$ dla wymuszenia jednostkowego oraz czas regulacji $t_s = 3.3333s$ (zastosować kryterium 2%).
3. Określić wartość parametru wzmacnienia K układu po kompensacji dla którego spełnione są kryteria jakości, podane w punkcie 2.



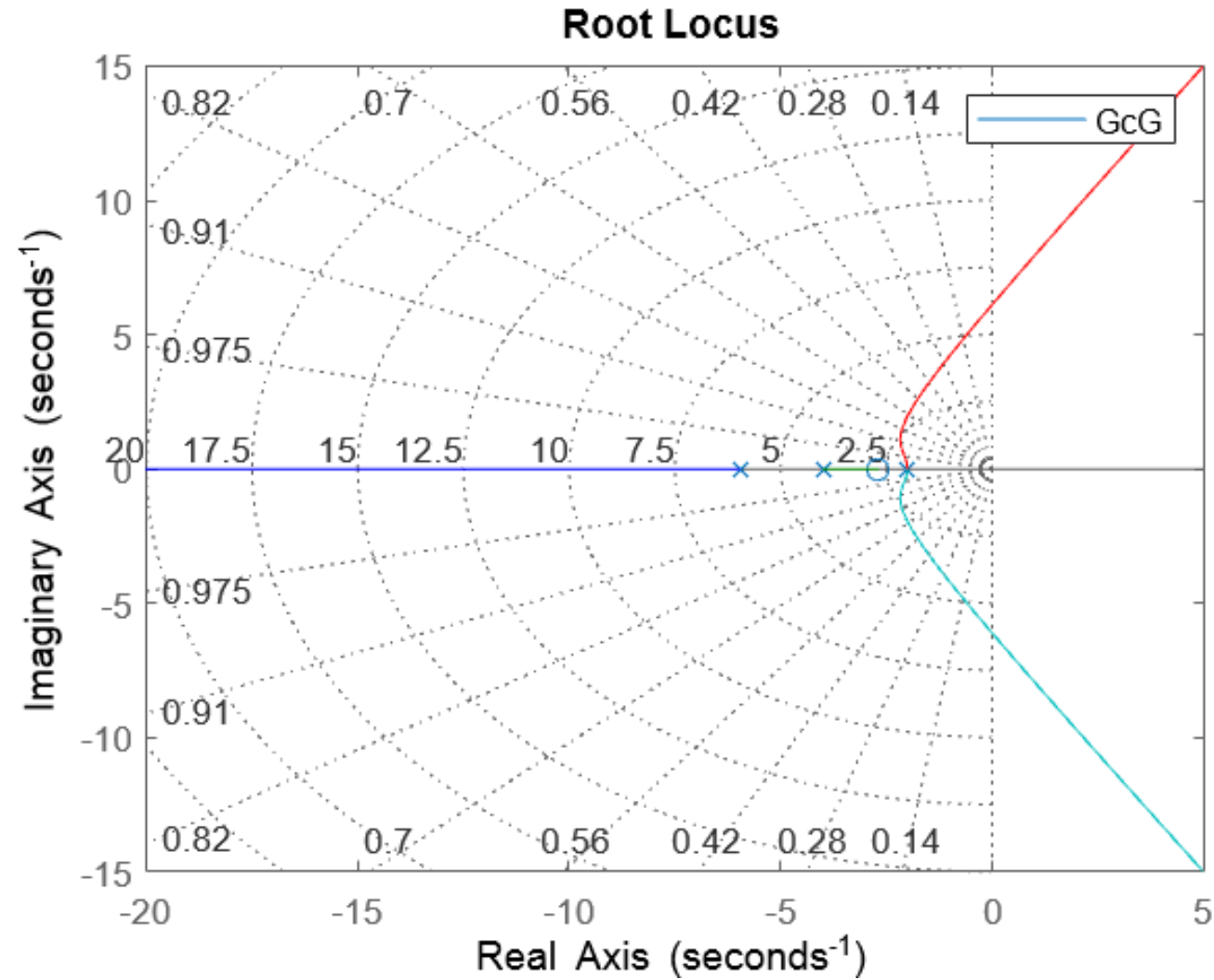


Przykład 3 – Linie pierwiastkowe układu nieskompensowanego – rlocus(G)



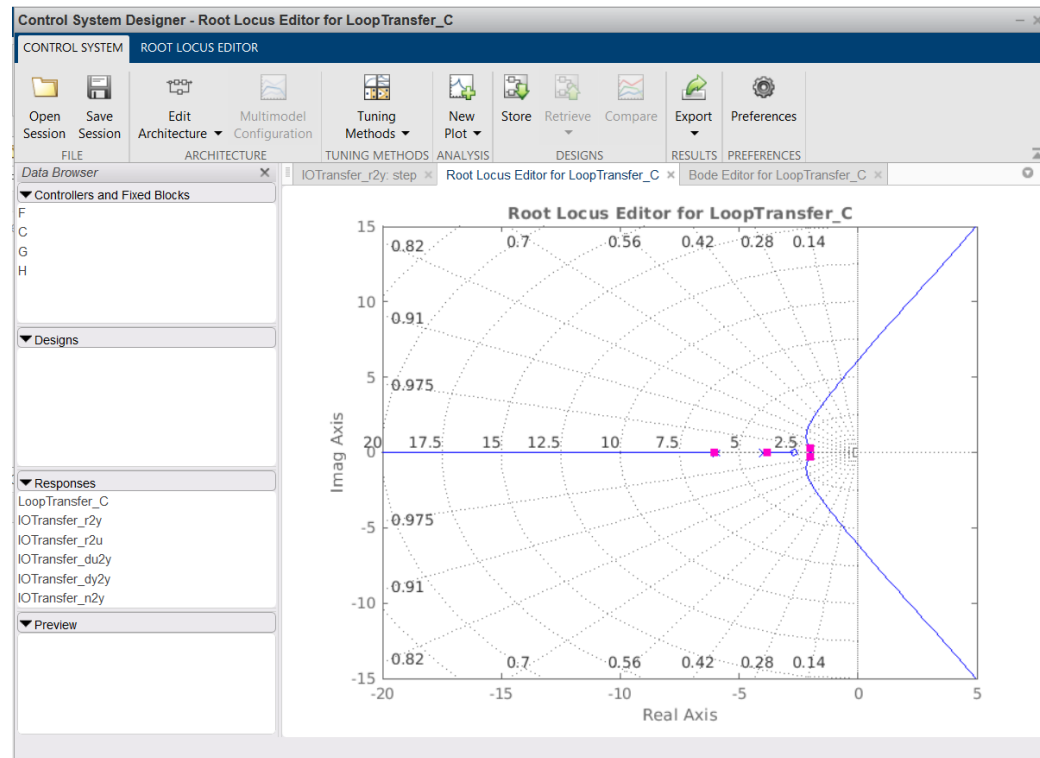
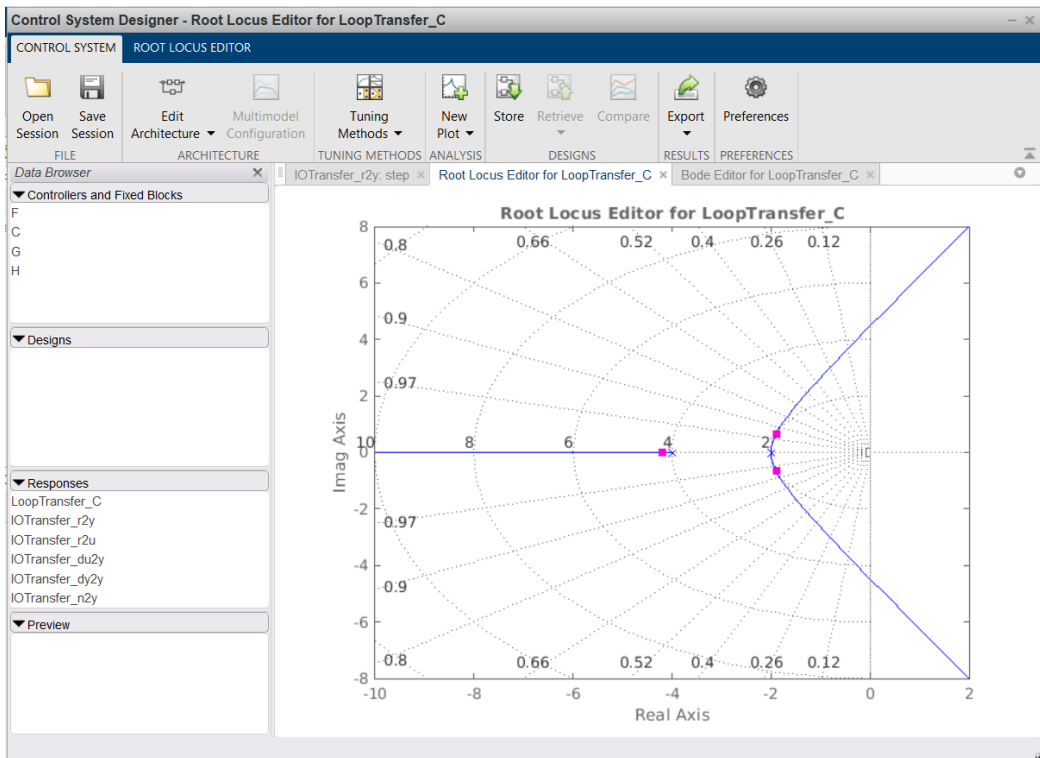


Przykład 3 – Linie pierwiastkowe układu skompensowanego – rlocus(GcG)



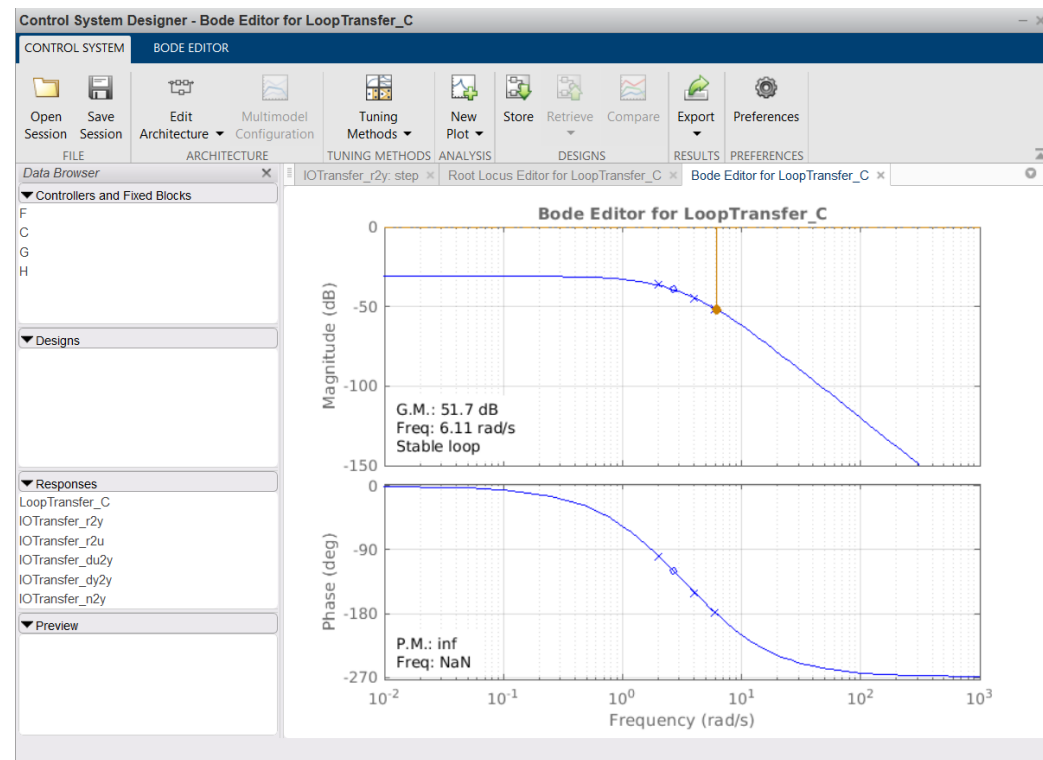
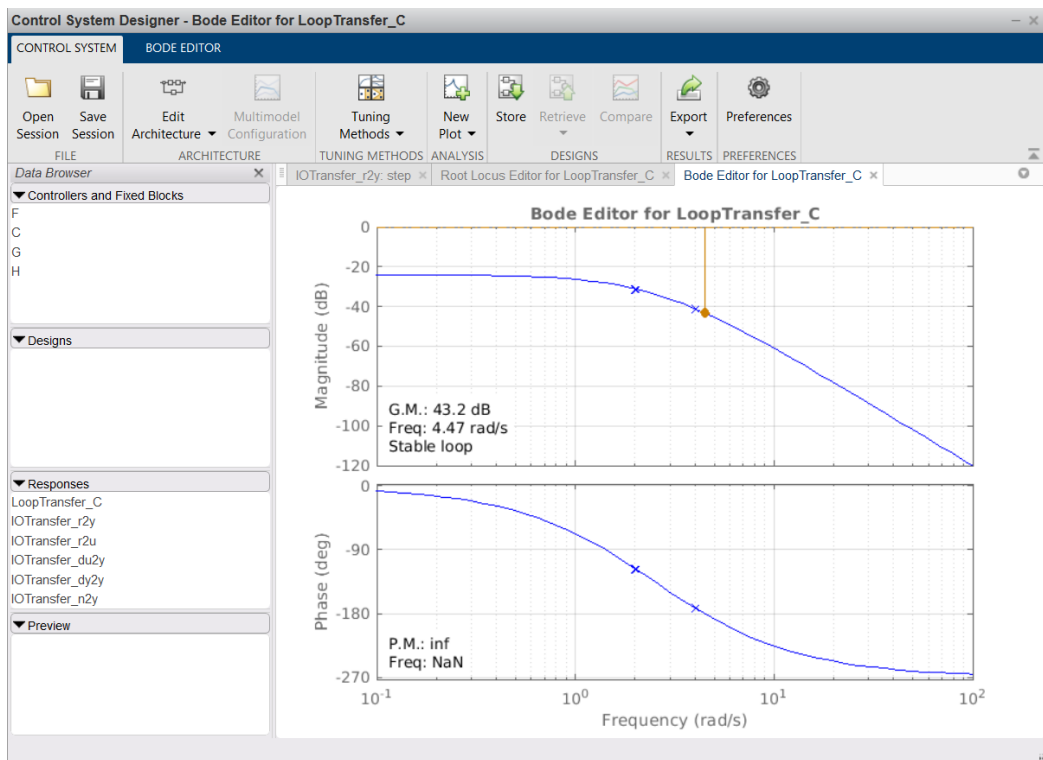


Przykład 3 – MATLAB - sisotool(G) vs sisotool(GcG)



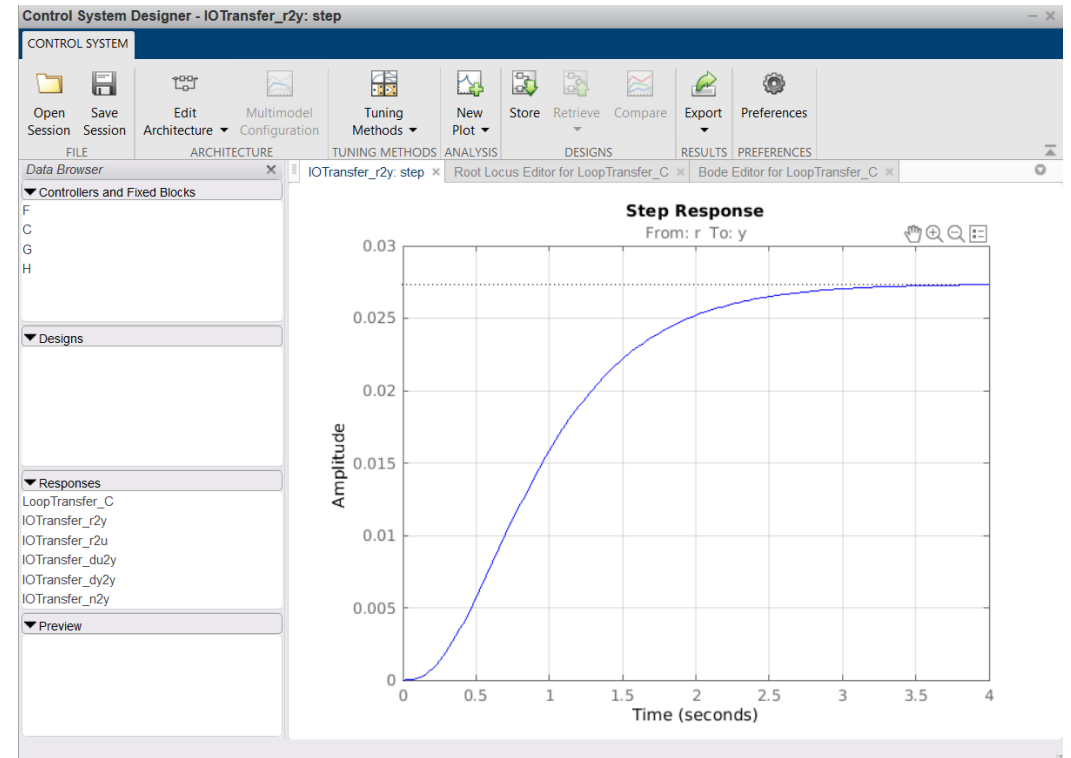
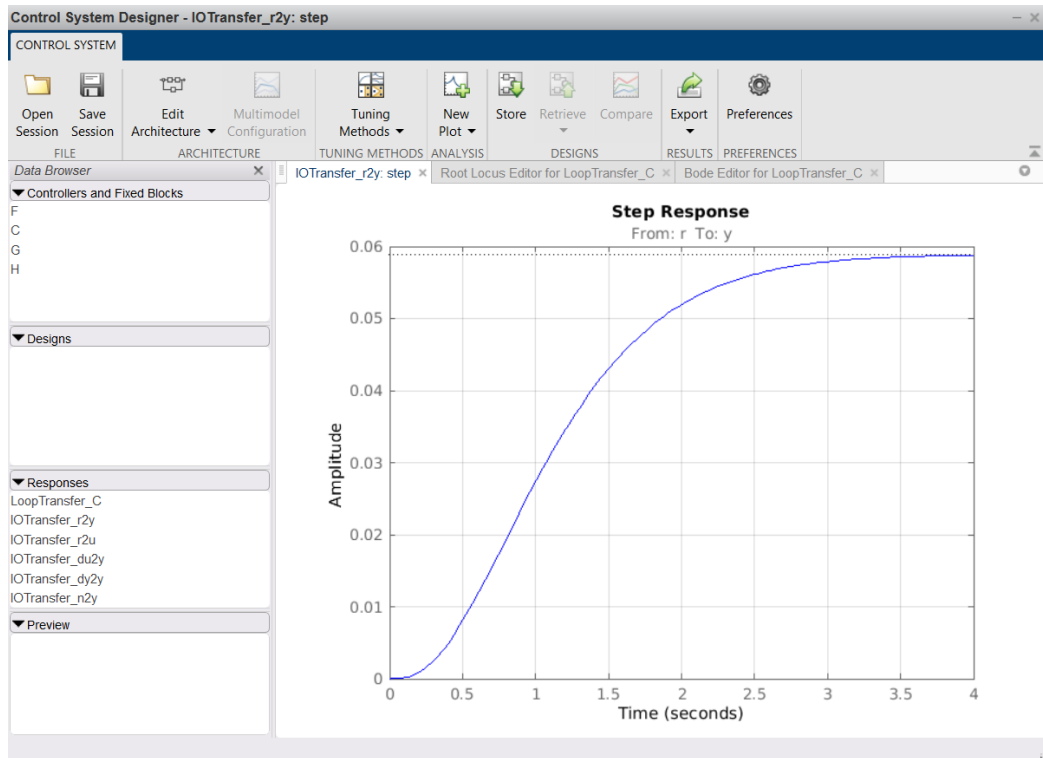


Przykład 3 – MATLAB - sisotool(G) vs sisotool(GcG)



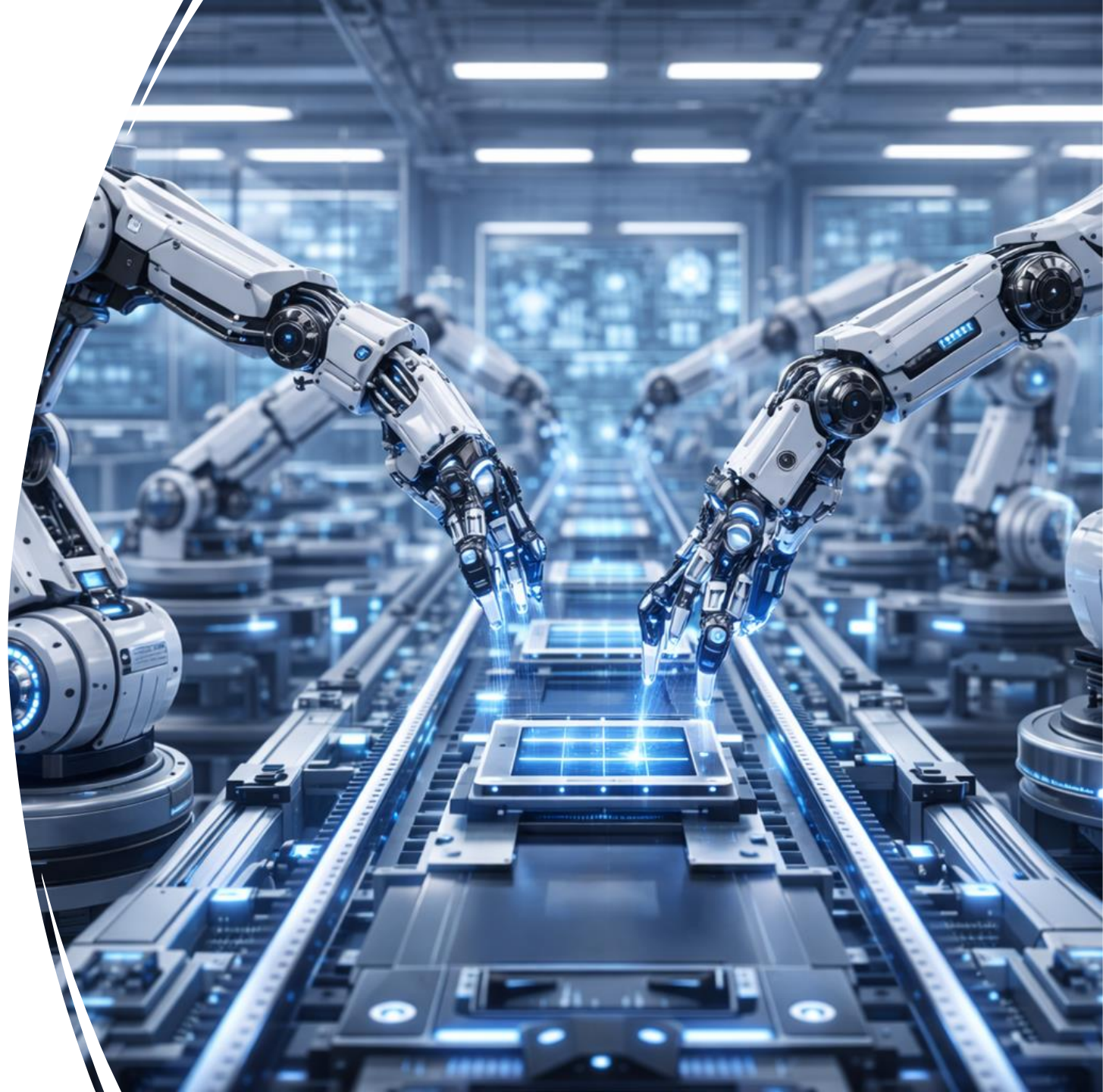


Przykład 3 – MATLAB - sisotool(G) vs sisotool(GcG)



Podsumowanie

- ✓ **Metoda linii pierwiastkowych** jest klasycznym narzędziem projektowania kompensatorów/ regulatorów w dziedzinie liczby zespolonej „ s ”, opartym na analizie zmian położenia biegunów układu zamkniętego w funkcji wzmocnienia lub innych parametrów układu.
- ✓ **Metoda linii pierwiastkowych** umożliwia **wizualizację dynamiki układu** – stanowi graficzną reprezentację wpływu zmian wartości wybranych parametrów na zachowanie układu.
- ✓ Bieguny układu zamkniętego przemieszczają się od biegunów układu otwartego do jego zer w funkcji wzmocnienia K .
- ✓ Metoda umożliwia badanie stabilności układu.
- ✓ Naszkicowanie linii pierwiastkowych układu przed oraz po kompensacji pozwala przeprowadzić **analizę wpływu kompensatorów** na położenie biegunów dominujących, determinujących najważniejsze własności układu.



Podsumowanie

- ✓ Metoda linii pierwiastkowych pozwala na świadome kształtowanie charakterystyk układów regulacji w różnorodnych zastosowaniach przemysłowych, od prostych regulatorów temperatury po zaawansowane systemy sterowania robotami czy dronami.
- ✓ Kompensatory typu „lead” projektujemy stosując np. metodę linii pierwiastkowych. Dobieramy wartości 3 parametrów (K_c , α , T), żeby zapewnić pożądane własności rozważanego układu (bez istotnego pogorszenia wartości istotnych parametrów).
- ✓ Do weryfikacji spełnienia wszystkich wymagań zaprojektowanego kompensatora można zastosować metodę charakterystyk częstotliwościowych lub oprogramowanie numeryczne np. **Matlab**.
- ✓ Jeśli znajdziemy rozwiązanie, można zastanowić się, czy istnieje lepsze lub najlepsze (optymalne).



Spis Piśmiennictwa

- [1] W. R. Evans, "Control system synthesis by root locus method," *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. 69, no. 1, pp. 66–69, 1950.
- [2] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 5th ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 2010.
- [3] N. S. Nise, *Control Systems Engineering*, 7th ed. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2015.
- [4] R. C. Dorf and R. H. Bishop, *Modern Control Systems*, 13th ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Pearson, 2016.
- [5] G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 7th ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Pearson, 2015.
- [6] K. J. Åström and R. M. Murray, *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 2008.
- [7] B. C. Kuo and F. Golnaraghi, *Automatic Control Systems*, 9th ed. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2014.
- [8] J. J. D'Azzo and C. H. Houpis, *Linear Control System Analysis and Design with MATLAB*, 5th ed. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2003.



Artykuły naukowe

- [9] W. C. Messner, M. D. Bedillion, L. Xia, and D. C. Karns, "Lead and lag compensators with complex poles and zeros: Design formulas for modeling and loop shaping," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 27, no. 1, pp. 44–54, 2007.
- [10] S. Gumussoy and W. Michiels, "Computation of the root locus for SISO systems with time delays," *Automatica*, vol. 47, no. 6, pp. 1238–1245, 2011.
- [11] J. Chiasson, "A method for computing the root locus of time-delay systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, no. 1, pp. 136–140, 1993.
- [12] M. N. Spanos and R. Lozano, "A revision of the root locus method and its application to time-delay systems," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 39, no. 20, pp. 6145–6160, 2015.
- [13] A. B. Özgüler, "Root locus analysis of infinite-dimensional systems," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 44, no. 1, pp. 312–335, 2005.
- [14] U. Münz, F. Allgöwer, and M. Zellner, "Internal model control and root locus design for nonlinear systems," *Automatica*, vol. 46, no. 7, pp. 1239–1245, 2010.
- [15] R. Zanasi, "Analytical design of lead-lag compensators on Nyquist and Nichols planes," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 44, no. 1, pp. 13145–13150, 2011.



Zastosowania i kierunki rozwoju

- [16] W. Yang, "Design and analysis of root locus based controllers," *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 2634, no. 1, 2023.
- [17] G. Rigatos, "Design of robust electric power system stabilizers using lead-lag compensators," *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 81, no. 3, pp. 556–567, 2011.
- [18] M. C. M. Teixeira, "Direct expressions for Ogata's lead-lag design method using root locus," *IEEE Transactions on Education*, vol. 37, no. 1, pp. 63–69, 1994.
- [19] S. Skogestad and I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, 2nd ed. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2005.
- [20] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover, *Robust and Optimal Control*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 1996.
- [21] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice Hall, 1993.
- [22] Y. Yamamoto, "A function space approach to root locus of distributed parameter systems," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 39, no. 5, pp. 1408–1422, 2001.



Wykłady

Lecture 14: Lead Compensator Design – Principles of Automatic Control
Massachusetts Institute of Technology (MIT OpenCourseWare)
<https://ocw.mit.edu/courses/16-06-principles-of-automatic-control-fall-2012/resources/lecture-14/>

Lecture 26: Compensator Design using Root Locus & State Space
Massachusetts Institute of Technology (MIT OpenCourseWare)
<https://ocw.mit.edu/courses/2-004-systems-modeling-and-control-ii-fall-2007/resources/lecture-26/>

Lecture 2: Dynamic Compensation and Root Locus (Lead Design)
Massachusetts Institute of Technology (MIT OpenCourseWare)
<https://ocw.mit.edu/courses/16-30-feedback-control-systems-fall-2010/resources/lecture-2/>



Kursy akademickie

Lecture 20: Root Locus – Lead Compensator Design

Michigan State University

https://www.egr.msu.edu/classes/me451/jchoi/2008/notes/ME451_L20_RootLocusLead.pdf

Lead Compensators using Root Locus

Bison Academy (Electrical Engineering Course)

<https://www.bisonacademy.com/ECE461/Videos/23%20Lead%20Compensators%20using%20Root%20Locus.pdf>

Kursy / materiały specjalistyczne (projektowanie RL + kompensatory)

Root Locus Based Compensator Design (Lead/Lag)

Academic Lecture Notes (Control Systems Course)

<https://www.scribd.com/document/961845295/Lecture-31-Root-Locus-based-compensator-design-1>





Dziękuję
za uwagę

dr inż. Edyta Rola