



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa  
Politechnika Warszawska

# Podstawy Automatyki i Sterowania II

Ćwiczenie 4: Metoda linii pierwiastkowych

Warszawa, kwiecień 2026 r.

# Po co projektujemy kompensatory?

- ✓ Problemy w układach rzeczywistych: zbyt wolna odpowiedź, nadmierne przeregulowanie, niestabilność systemu.
- ✓ Przykład układu bez kompensatora: ograniczenia wydajności, brak możliwości spełnienia wymagań projektowych
- ✓ Możliwe działania korygujące: zmiana struktury układu, dodanie odpowiedniego regulatora.
- ✓ Kompensatory są niezbędne, gdy układ sterowania nie spełnia wymagań dotyczących jakości regulacji. Pozwalają one na modyfikację charakterystyk dynamicznych systemu bez ingerencji w jego podstawową strukturę.
- ✓ Dzięki zastosowaniu kompensatorów możemy **poprawić szybkość odpowiedzi, zmniejszyć przeregulowanie** oraz **zwiększyć stabilność układu.**



# Proces projektowania kompensatorów

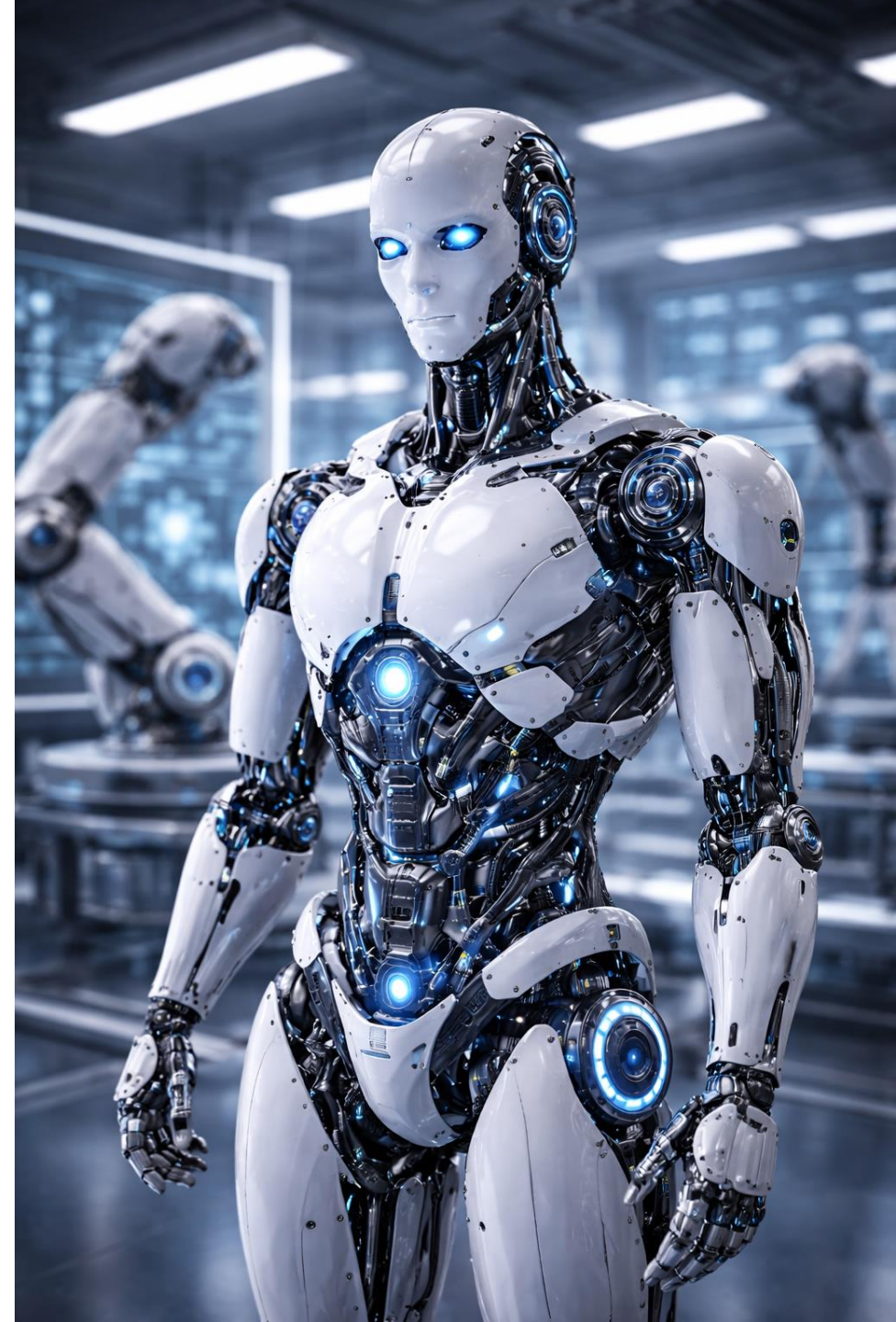
- ✓ Proces projektowania kompensatora rozpoczynamy od jasnego **zdefiniowania wymagań**, następnie **analizujemy układ otwarty** i **wybieramy odpowiedni typ kompensatora**.
- ✓ **Kluczowym etapem** jest **dobór położzeń zer i biegunów kompensatora**, który pozwala na uzyskanie pożądanych właściwości dynamicznych układu zamkniętego.
- ✓ Projektowanie kompensatorów wymaga nie tylko **wiedzy teoretycznej**, ale także **praktycznego doświadczenia**.
- ✓ Warto pamiętać o typowych błędach, takich jak nieodpowiednie umieszczenie zer i biegunów kompensatora czy ignorowanie marginesów stabilności, które mogą prowadzić do nieoptymalnych lub nawet niestabilnych zakresów pracy układów.



# Implementacja kompensatora

Implementacja zaprojektowanego kompensatora w praktyce wymaga przejścia przez kilka kluczowych etapów. Rozpoczynamy od **modelowania matematycznego układu i kompensatora**, co pozwala na wstępną weryfikację koncepcji. Następnie przeprowadzamy **symulacje numeryczne** np. w środowisku SIMULINK, które umożliwiają **testowanie różnych scenariuszy bez ryzyka uszkodzenia rzeczywistego systemu**.

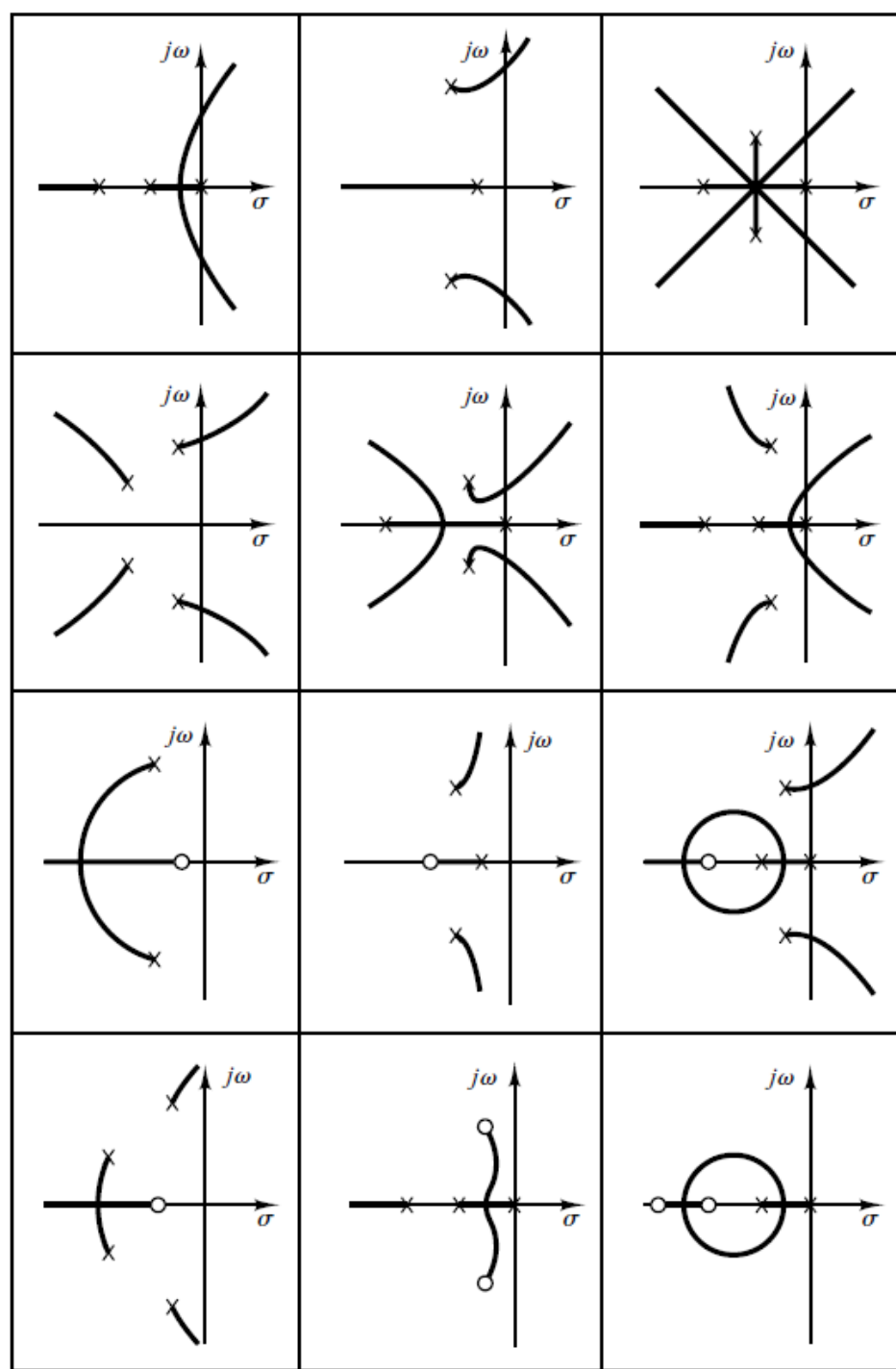
Po pozytywnej weryfikacji w bezpiecznym środowisku numerycznym, przechodzimy do **wdrożenia kompensatora**, wykorzystując mikrokontrolery lub dedykowane sterowniki. Ostatnim etapem jest **przeprowadzenie testów doświadczalnych** oraz **strojenie parametrów w warunkach rzeczywistych**, aby uzyskać korzystne charakterystyki pracy.



# Metoda linii pierwiastkowych

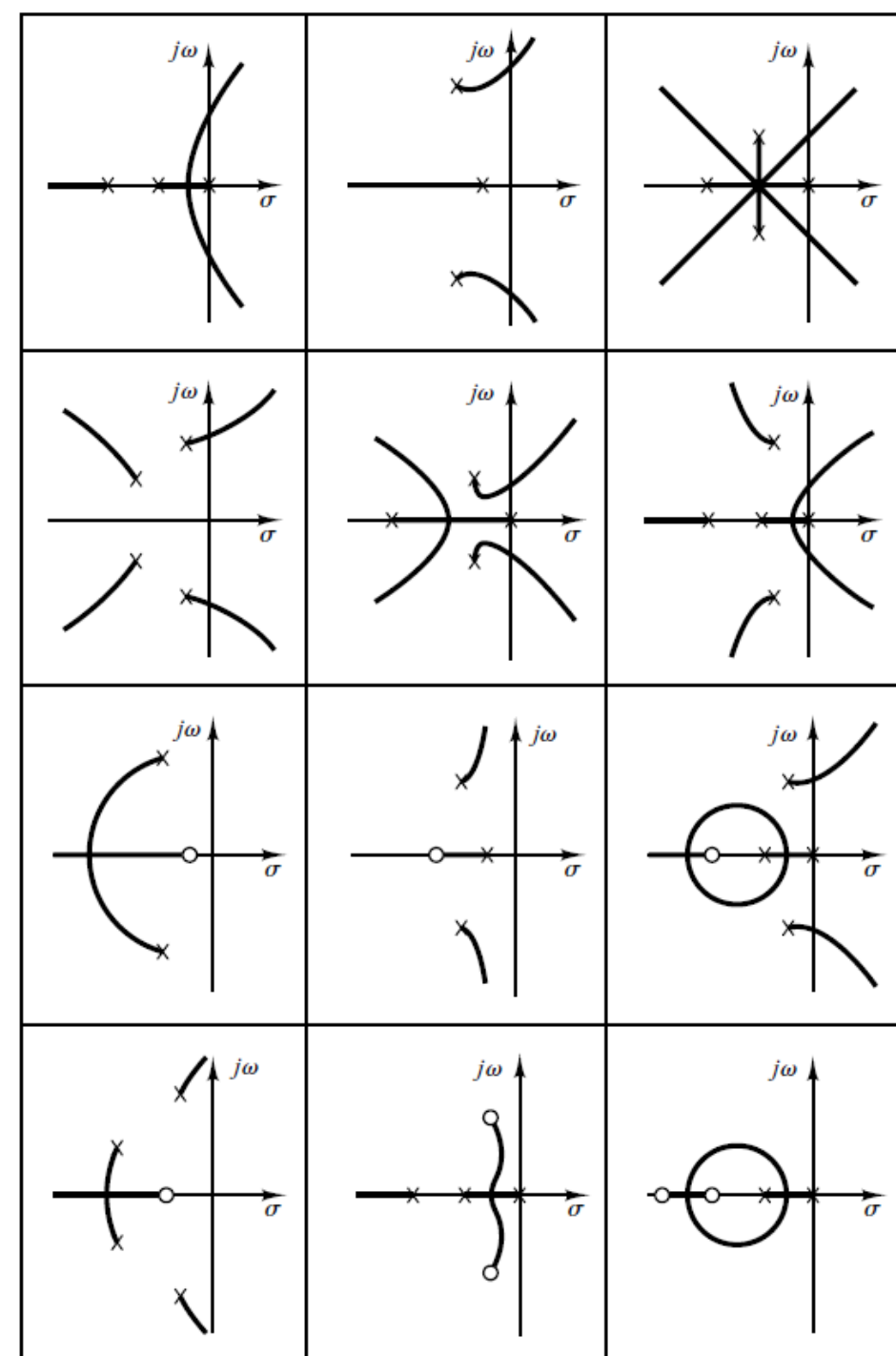
Metoda linii pierwiastkowych to narzędzie wykorzystywane w teorii sterowania do **badania wpływu zmian wzmacnienia na stabilność i dynamikę układów regulacji** poprzez analizę wszystkich możliwych położenia biegunów układu zamkniętego.

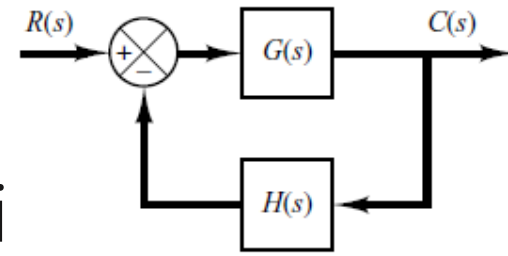
Linie pierwiastkowe wizualizują ścieżki, po których można przemieszczać bieguny układu zamkniętego dobierając odpowiednią wartość wzmacnienia  $K$  od zera do nieskończoności. Analiza tych ścieżek dostarcza cennych **informacji o zachowaniu układu** w szerszym zakresie pracy i umożliwia **świadome projektowanie kompensatorów/ regulatorów**.



# Projektowanie układów sterowania metodą linii pierwiastkowych

- ✓ **Wzajemne położenie biegunów układu zamkniętego** ma istotny wpływ na charakter odpowiedzi przejściowych układów.
- ✓ Czasami już sama korekcja wzmocnienia może zapewnić pożądane własności układu.
- ✓ Znajdowanie biegunów w przypadku wielomianów o stopniach wyższych niż 3 wymaga stosowania obliczeń numerycznych.
- ✓ Istnieje jednak prosta, graficzna metoda znajdowania pierwiastków równania charakterystycznego, zwana metodą linii pierwiastkowych.
- ✓ Na płaszczyźnie zmiennej zespolonej rysuje się **wszystkie możliwe położenia pierwiastków równania charakterystycznego** dla wszystkich wartości określonego parametru, którym na ogół jest wzmocnienie układu.





## Reguły szkicowania linii pierwiastkowych

Do zrozumienia idei rysowania linii pierwiastkowych niezbędne jest wprowadzenie warunku kąta i warunku modułu. Rozważmy układ sterowania z ujemną pętlą sprzężenia zwrotnego (schemat blokowy). Transmitancja operatorowa układu zamkniętego:

$$G_z(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

**\*) Równanie charakterystyczne układu zamkniętego:**

$$1 + G(s)H(s) = 0 \Leftrightarrow G(s)H(s) = -1 \quad *) \Leftrightarrow 1) \wedge 2)$$

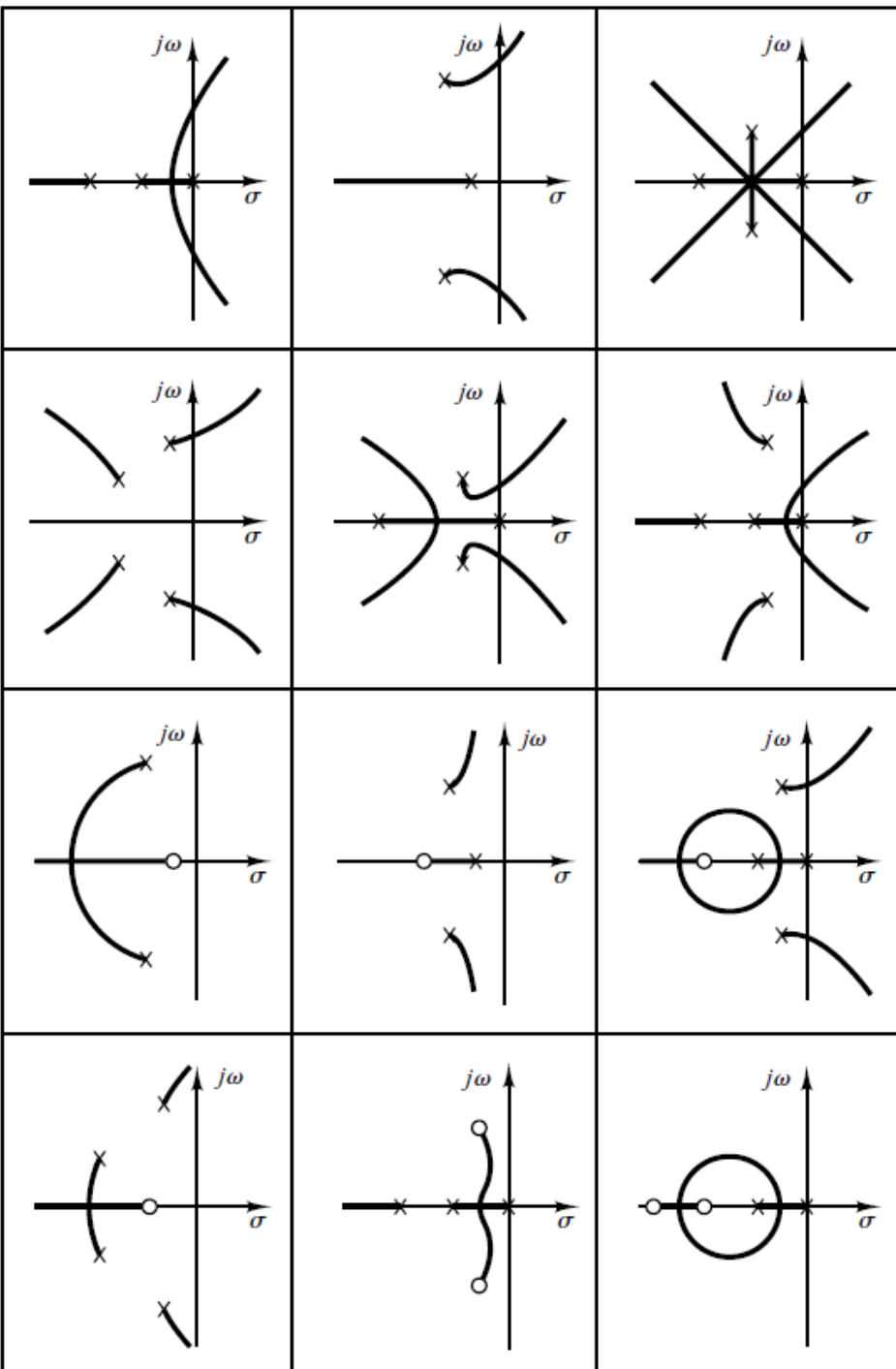
Jest równoważne 2 warunkom:

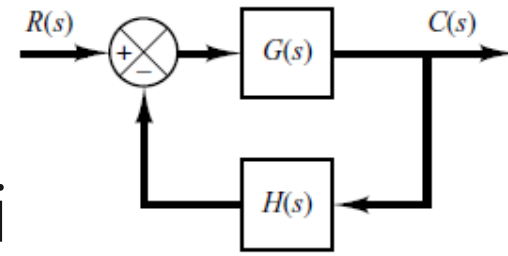
**1) Warunkowi kąta:**

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ(2k + 1) \text{ dla } k = 0,1,2,3 \dots$$

**2) Warunkowi modułu:**

$$|G(s)H(s)| = 1$$





## Reguły szkicowania linii pierwiastkowych

Wartości zmiennej zespolonej  $s$ , które spełniają warunek kąta i warunek modułu to rozwiązania równania charakterystycznego (pierwiastki, bieguny) układu zamkniętego.

Zauważmy, że w równaniu charakterystycznym układu zamkniętego:

$$*) 1 + G(s)H(s) = 0 \Leftrightarrow G(s)H(s) = -1 \quad *) \Leftrightarrow 1) \wedge 2),$$

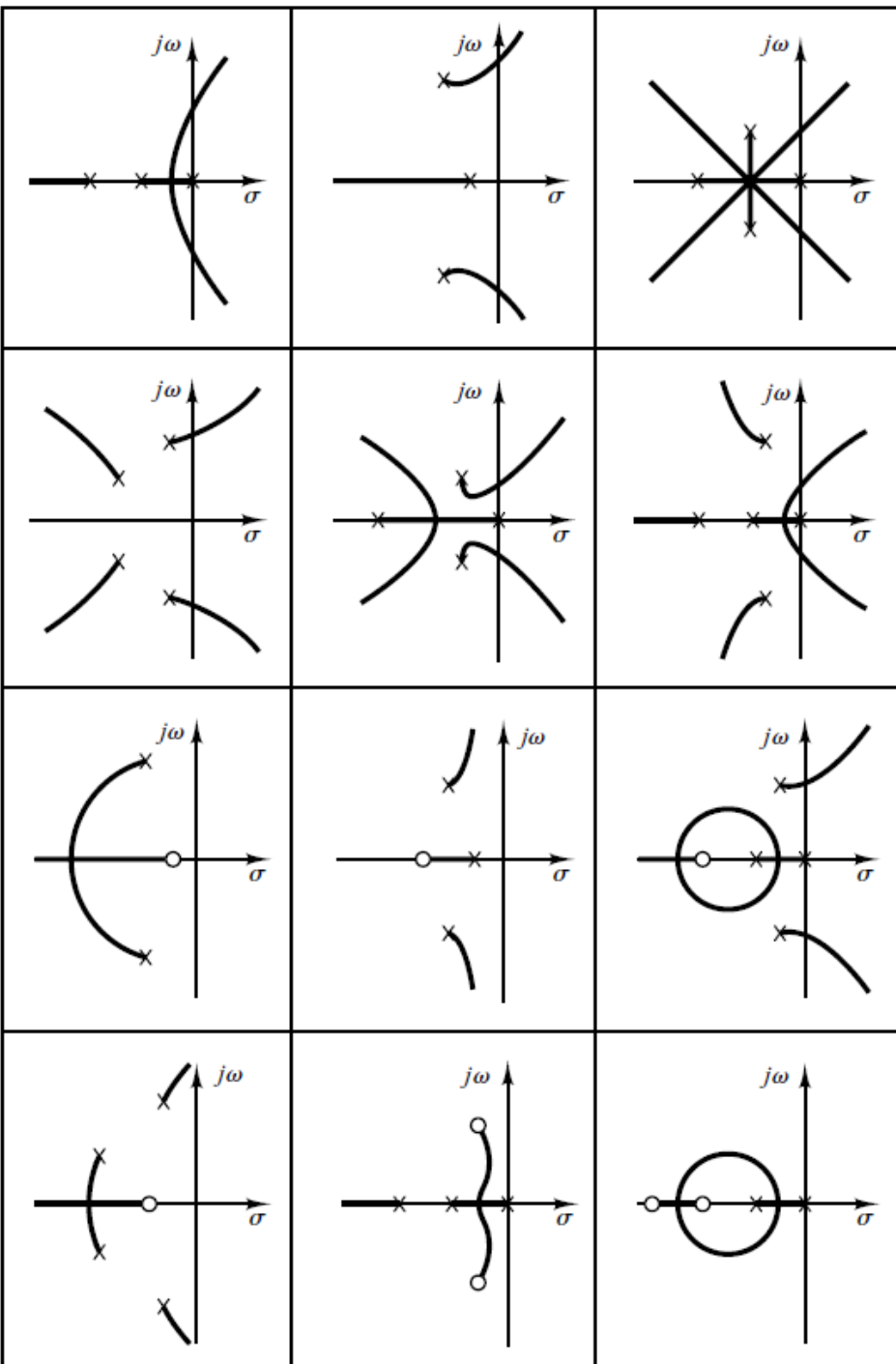
występuje transmitancja operatorowa układu otwartego:

$$G_o(s) = G(s)H(s)$$

1) **Wykres punktów, które spełniają tylko warunek kąta** ( $\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ(2k + 1)$  dla  $k = 0, 1, 2, 3 \dots$ ) **nazywamy liniami pierwiastkowymi.**

2) Wartości biegunów, związane z określonym wzmocnieniem, zmieniającym się od 0 do  $\infty$ , mogą być wyznaczone z warunku modułu:

$$|G(s)H(s)| = 1$$



# Obliczanie modułu i kątów

Rozważmy następujący przykład transmitancji operatorowej układu otwartego:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+z_1)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)(s+p_4)}$$

gdzie  $p_1, p_2, p_3$  i  $p_4$  są biegunami układu otwartego, a  $z_1$  jest zerem  $G(s)H(s)$ . Kąty i moduł transmitancji układu otwartego określamy następująco:

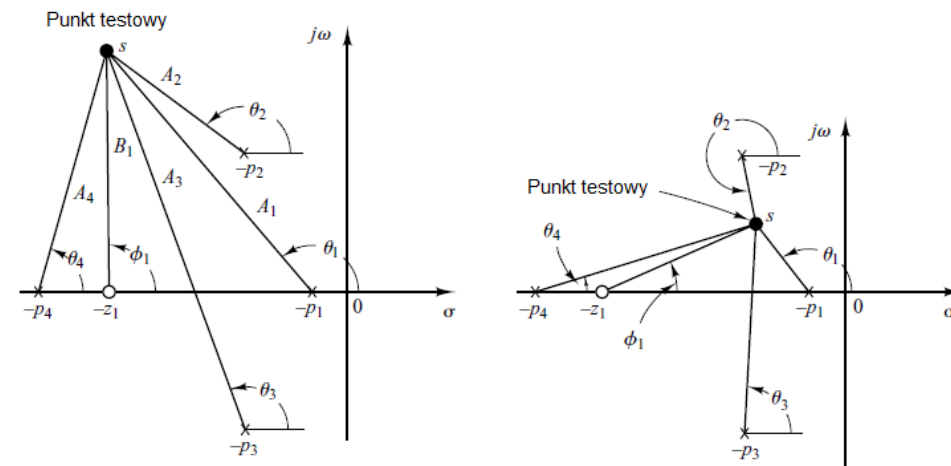
Z warunku kąta:

$$\angle G(s)H(s) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 = \pm 180^\circ(2k + 1) \text{ dla } k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Z warunku modułu:

$$|G(s)H(s)| = \frac{KB_1}{A_1 A_2 A_3 A_4} = 1$$

Wartości powyższych kątów i amplitud pokazano na rysunku.



# Reguły szkicowania linii pierwiastkowych

$$1 + G(s)H(s) = 0 \Leftrightarrow G(s)H(s) = -1$$

Dany jest układ przedstawiony na rysunku. Wyznaczamy równanie charakterystyczne. Transmitancję operatorową układu otwartego przedstawiamy w postaci funkcji wymiernej:

$$1 + \frac{K(s+z_1)(s+z_2)(\dots)(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)(\dots)(s+p_n)} = 0$$

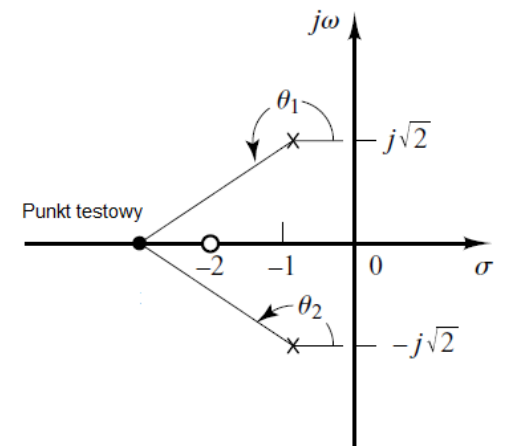
gdzie  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  są biegunami transmitancji układu otwartego, a  $z_1, \dots, z_m$  są zerami układu otwartego  $G(s)H(s)$ .

Zakładamy, że współczynnik wzmocnienia  $K > 0$ .

Jeśli  $K < 0$ , to układ z rysunku stanowi układ z dodatnim sprzężeniem zwrotnym i wtedy dla poprawności rozważań musimy zmodyfikować warunek kąta.

# Reguły szkicowania linii pierwiastkowych

- 1) Ustalić położenie biegunów i zer układu otwartego  $G(s)H(s)$ .** Linie pierwiastkowe rozpoczynają się od biegunów  $G(s)H(s)$ , a kończą w zerach  $G(s)H(s)$  (skończonych, bądź w nieskończoności). Wykres linii pierwiastkowych będzie miał  $n$  gałęzi. Na ogół liczba biegunów jest większa od liczby zer transmitancji układu otwartego ( $n \geq m$ ). Ponieważ liczba gałęzi wynosi  $n$ , to  $n-m$  gałęzi będzie się kończyło w nieskończonych zerach, wzdłuż asymptot. Linie pierwiastkowe są symetryczne względem osi rzeczywistej.
- 2) Określić fragmenty linii pierwiastkowych, które leżą na osi rzeczywistej.** Wpływ na położenie fragmentów linii pierwiastkowych na osi rzeczywistej mają tylko zera i bieguny leżące na tej osi. Zespólone, sprzężone bieguny i zera transmitancji  $G(s)H(s)$  nie mają wpływu na położenie linii pierwiastkowych na osi rzeczywistej, gdyż wprowadzają kąt  $360^\circ$ . Aby zbadać, czy linia pierwiastkowa leży na fragmencie osi rzeczywistej, wybieramy na niej punkt testowy. Jeśli całkowita liczba zer i biegunów na prawo od punktu testowego jest nieparzysta, to ten punkt należy do linii pierwiastkowej.



# Reguły szkicowania linii pierwiastkowych

**3) Wyznaczyć asymptoty linii pierwiastkowych i punkty przecięcia asymptot.** Kąty asymptot względem osi rzeczywistej wyznacza się z następującego wzoru:

$$\alpha = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{n-m} \text{ dla } k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Wszystkie asymptoty przecinają oś rzeczywistą. Miejsce przecięcia asymptoty z osią rzeczywistą wyznaczamy z zależności:

$$\sigma_\alpha = \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)}{n-m}$$

Lub

$$\sigma_\alpha = \frac{\sum \text{biegunów} - \sum \text{zer}}{n-m}$$

# Reguły szkicowania linii pierwiastkowych

## 4) Punkty rozgałęzień.

Punkty rozgałęzień odpowiadają pierwiastkom wielokrotnym równania charakterystycznego. Przypuśćmy, że równanie charakterystyczne dane jest w następującej postaci:

$$B(s) + KA(s) = 0 \Rightarrow K = \dots$$

Punkty rozgałęzień mogą być wyznaczone z następującej równości:

$$\frac{dK}{ds} = \frac{B'(s)A(s) - B(s)A'(s)}{A^2(s)} = 0$$

Nie wszystkie pierwiastki równania są punktami rozgałęzień. Jeśli wyznaczone pierwiastki są rzeczywiste i należą do fragmentów linii pierwiastkowych leżących na osi rzeczywistej, to są to faktyczne punkty rozgałęzień. Jeśli dwa pierwiastki  $s = s_1$  i  $s = -s_1$  równania są sprzężone i jeśli nie jest pewne, czy leżą na liniach pierwiastkowych, to sprawdzamy wartość wzmocnienia  $K$  dla pierwiastka  $s_1$ . Jeśli wartość wzmocnienia  $K$ , związana z pierwiastkiem  $s_1$ , wyznaczonym z równania na  $K$ , jest dodatnia i rzeczywista, to jest to faktyczny punkt rozgałęzienia.

# Reguły szkicowania linii pierwiastkowej

## 5) Kąt wyjścia z bieguna i wejścia do zera.

Kąt wyjścia z bieguna wyznaczamy z następującej równości:

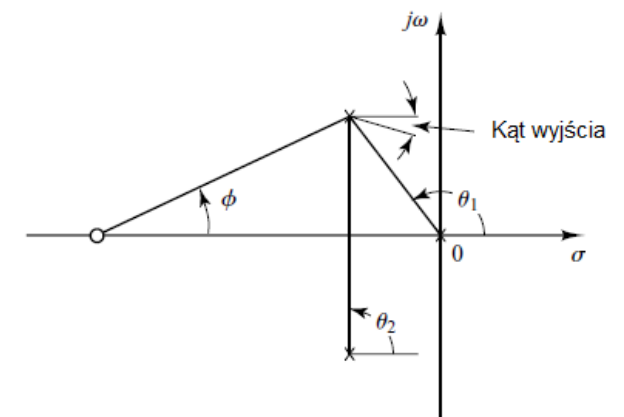
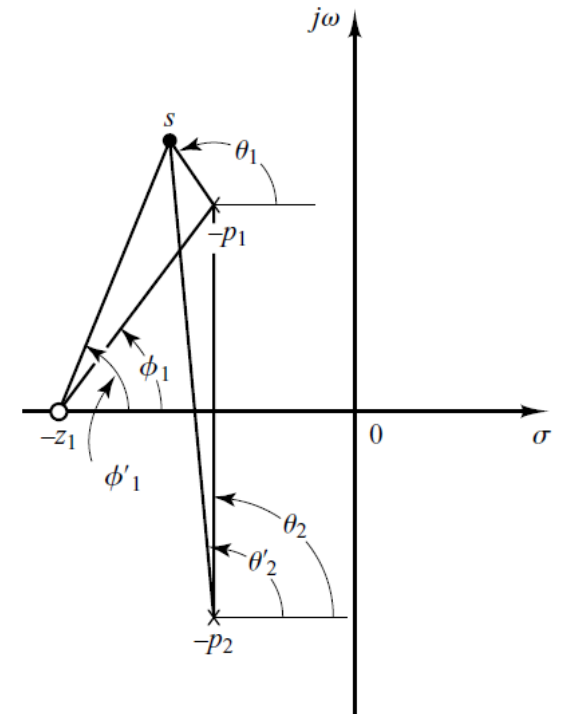
$$\theta_d = 180^\circ - \sum \text{kątów od innych biegunów} + \sum \text{kątów od zer}$$

Kąt wejścia do zera wyznaczamy z następującej równości:

$$\theta_a = 180^\circ - \sum \text{kątów od innych zer} + \sum \text{kątów od biegunów}$$

Przykładowy kąt wyjścia zaznaczono na rysunku.

**6) Punkty przecięcia z osią urojoną.** Punkty przecięcia z osią urojoną znajdujemy poprzez zastosowanie kryterium Routha-Hurwitza, bądź poprzez wstawienie wartości  $s = j\omega$  do równania charakterystycznego i rozwiązaniu go względem  $K$  i  $\omega$ .



# Reguły szkicowania linii pierwiastkowych

## 7) Określenie biegunów dominujących układu zamkniętego.

Punkt na linii pierwiastkowej będzie biegunem dominującym układu zamkniętego, wtedy, gdy będzie spełniał warunek amplitudy. Można również wyznaczyć wartość parametru wzmocnienia  $K$ , dla dowolnego punktu na linii pierwiastkowej (np. punktu  $s_1$ ).

Wartość parametru wzmocnienia  $K$  możemy wyznaczyć z warunku modułu:

$$|G(s)H(s)| = \frac{KB_1}{A_1A_2A_3A_4} = 1$$

$$K = \frac{1}{|G(s)H(s)|}$$

# Linie stałego tłumienia oraz częstości drgań własnych

Transmitancja układu drugiego rzędu ma postać:

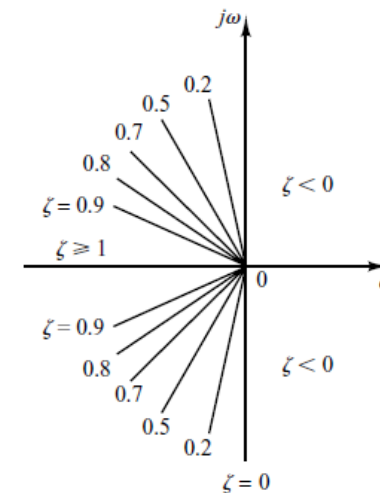
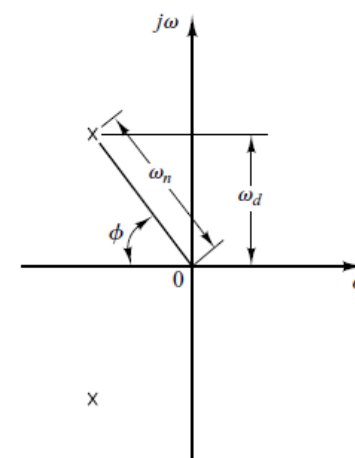
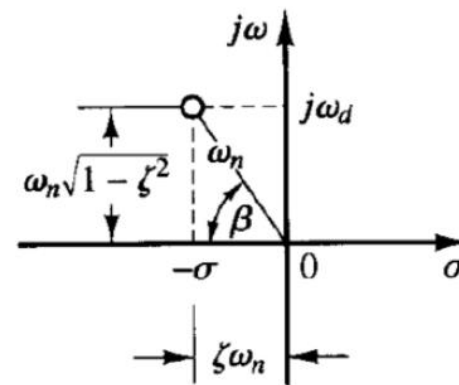
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

gdzie  $\omega_n$  jest częstością drgań własnych, a  $\xi$  jest współczynnikiem tłumienia drgań. Dla tłumienia podkrytycznego  $0 < \xi < 1$  mamy:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \xi\omega_n + j\omega_d)(s + \xi\omega_n - j\omega_d)}$$

gdzie:

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$  to częstość drgań tłumionych, zaś  $\cos\beta = \xi$



# Przykład 1

*Dany jest układ z ujemną, jednostkową pętlą sprzężenia zwrotnego. W torze głównym znajduje się element dynamiczny o transmitancji operatorowej:*

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+4)}$$

- 1. Należy naszkicować linie pierwiastkowe, zakładając, że wzmacnienie  $K > 0$ .*
- 2. Wyznaczyć zakres wartości współczynników wzmacnienia  $K$ , dla których układ będzie stabilny.*
- 3. Określić wartość wzmacnienia krytycznego, przy którym pojawiają się oscylacje o stałej amplitudzie oraz okres tych oscylacji.*





## Przykład 1

Rozważmy następujący przykład transmitancji operatorowej układu otwartego:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+4)}$$

1) Warunek kąta:

$$\angle G(s)H(s) = \angle \frac{K}{s(s+2)(s+4)} = -\angle s - \angle (s+2) - \angle (s+4) = \pm 180^\circ(2k+1) \text{ dla } k=0,1,2,3..$$

2) Warunek modułu:

$$|G(s)H(s)| = \left| \frac{K}{s(s+2)(s+4)} \right| = 1$$



## Przykład 1. Szkicowanie linii pierwiastkowych

### 1) *Należy ustalić położenie biegunów i zer transmitancji układu otwartego $G(s)H(s)$ .*

Linie pierwiastkowe rozpoczynają się od biegunów  $G(s)H(s)$ , a kończą w zerach  $G(s)H(s)$  (skończonych, bądź w nieskończoności,  $m=0$ ). Wykres linii pierwiastkowych będzie miał  $n=3$  gałęzi. Ponieważ liczba gałęzi wynosi  $n$ , to  $n-m=3$  gałęzi będzie się kończyło w nieskończonych zerach, wzdłuż asymptot. Linie pierwiastkowe są symetryczne względem osi rzeczywistej.

*Na płaszczyźnie zaznaczamy bieguny transmitancji układu otwartego:*

$$s_1 = 0 \text{ oraz } s_2 = -2 \text{ i } s_3 = -4$$

### 2) *Określić fragmenty linii pierwiastkowych, które leżą na osi rzeczywistej.*

*Jeśli całkowita liczba zer i biegunów na prawo od punktu testowego jest nieparzysta, to ten punkt należy do linii pierwiastkowej. W naszym przypadku linie pierwiastkowe będą pokrywały się z ujemną częścią osi rzeczywistej dla  $\sigma \in (-\infty; -4)$  oraz  $\sigma \in (-2; 0)$ .*



**3) Wyznaczyć asymptoty linii pierwiastkowych i punkty przecięcia asymptot.** Kąty asymptot względem osi rzeczywistej wyznacza się z następującego wzoru:

$$\alpha = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{n-m} \text{ dla } k = 0,1,2,3 \dots$$

$$\alpha = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{3} = \pm 60^\circ(2k+1) \text{ dla } k = 0,1,2,3 \dots \quad \alpha = \pm 60^\circ, \pm 180^\circ$$

Wszystkie asymptoty przecinają oś rzeczywistą. Miejsce przecięcia asymptoty z osią rzeczywistą wyznaczamy z zależności:

$$\sigma_\alpha = \frac{(p_1+p_2+\dots+p_n)-(z_1+z_2+\dots+z_m)}{n-m} = \frac{0-2-4}{3} = -2$$

Lub:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sum \text{biegunów} - \sum \text{zer}}{n-m}$$



## Przykład 1. Szkicowanie linii pierwiastkowych

**4) Punkty rozgałęzień.** Punkty rozgałęzień odpowiadają pierwiastkom wielokrotnym równania charakterystycznego. Wyznaczamy równanie charakterystyczne ( $1 + G(s)H(s) = 0$ ):

$$\frac{K}{s(s+2)(s+4)} + 1 = 0$$

$$K = -s(s+2)(s+4) = -s^3 - 6s^2 - 8s$$

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

$$\frac{dK}{ds} = -3s^2 - 12s - 8 = 0$$

$$s_1 = -0.845$$

$$s_2 = -3.155$$

Tylko punkt należący do RL jest faktycznym punktem rozgałęzienia:

$$s \approx -0.845$$

Dla rzeczywistych punktów rozgałęzienia, wartość  $K$  musi być rzeczywista, dodatnia ( $K \in \mathbf{R} \wedge K > 0$ ).

$$K = -s(s+2)(s+4) = -s^3 - 6s^2 - 8s$$

$$K(s_1 = -0.845) = \dots$$



### **5) Kąt wyjścia i wejścia (opcjonalne).**

*Kąt wyjścia z bieguna wyznaczamy z następującej równości:*

$$\theta_d = 180^\circ - \sum \text{kątów od innych biegunów} + \sum \text{kątów od zer}$$

*Kąt wejścia do zera wyznaczamy z następującej równości:*

$$\theta_z = 180^\circ - \sum \text{kątów od innych zer} + \sum \text{kątów od biegunów}$$



## Przykład 1. Szkicowanie linii pierwiastkowych

**6) Punkty przecięcia z osią urojoną.** Punkty przecięcia z osią urojoną znajdujemy poprzez zastosowanie kryterium Routha-Hurwitza, bądź poprzez wstawienie wartości  $s = j\omega$  do równania charakterystycznego i rozwiązaniu go względem  $K$  i  $\omega$ .

$$\begin{aligned}s^3 + 6s^2 + 8s + K &= 0 \\ (j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 8(j\omega) + K &= 0 \\ (K - 6\omega^2) + j\omega(8 - \omega^2) &= 0 \\ \omega = 0 \quad K = 0 \quad \text{lub} \quad \omega = 2\sqrt{2} \quad K = 48\end{aligned}$$

Granica stabilności:

$$K = 48$$

Warunek stabilności:

$$48 - K > 0 \Rightarrow K < 48$$

Częstości, przy których linie pierwiastkowe przecinają oś urojoną wynoszą  $\omega_{kr} = \pm 2\sqrt{2}$  rad/sek, a wzmacnienie w tych punktach wynosi  $K_{kr} = 48$ . Okres oscylacji wynosi:

$$T_{ocs} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\sqrt{2}} = 2,221 \text{ sek}$$

Punkty przecięcia z osią urojoną możemy alternatywnie znaleźć poprzez zastosowanie kryterium Routha-Hurwitza.

Zapas wzmacnienia:

$$\Delta K = \frac{K_{kr}}{K} \quad \Delta L = 20 \log \Delta K = \dots \text{ [dB]}$$



## Przykład 1. Szkicowanie linii pierwiastkowych

```
clear; clc; close all;
```

```
% transmitancja operatorowa
```

```
num = [1];
```

```
den = conv([1 0], conv([1 2],[1 4]));
```

```
G = tf(num, den);
```

```
figure;
```

```
rlocus(G);
```

```
grid on;
```

```
title('Root Locus:  $G(s)=K/(s(s+2)(s+4))$ ');
```

```
hold on;
```

```
% bieguny
```

```
p = pole(G);
```

```
plot(real(p), imag(p), 'rx', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 10);
```

```
% centroid
```

```
sigma = -2;
```

```
plot(sigma, 0, 'ko', 'MarkerSize', 8);
```

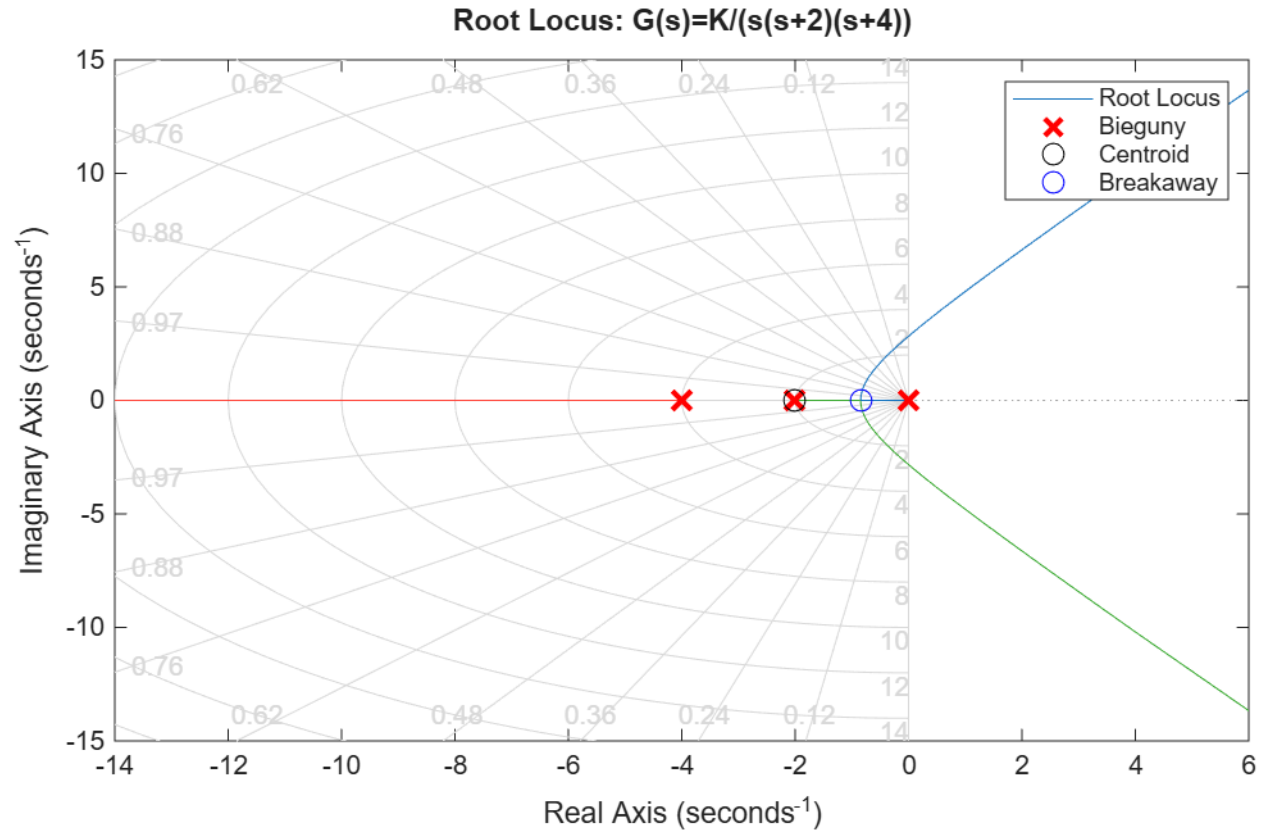
```
% breakaway
```

```
plot(-0.845, 0, 'bo', 'MarkerSize', 8);
```

```
legend('Root Locus', 'Bieguny', 'Centroid', 'Breakaway');
```



# MATLAB – Przykład 1 – Linie pierwiastkowe – rlocus(G)





# MATLAB – Przykład 1 – sisotool(G) – sprawdzenie rozwiązania

Control System Designer\*  
CONTROL SYSTEM ROOT LOCUS EDITOR

MODIFY POLES & ZEROS ZOOM AND PAN

Controllers and Fixed Blocks

- F
- C
- G
- H

Designs

Responses

- LoopTransfer\_C
- IOTransfer\_r2y
- IOTransfer\_r2u
- IOTransfer\_du2y
- IOTransfer\_dy2y
- IOTransfer\_n2y

Preview

Bode Editor for LoopTransfer\_C

Magnitude (dB)

Frequency (rad/s)

G.M.: 33.6 dB  
Freq: 2.83 rad/s  
Stable loop

Root Locus Editor for LoopTransfer\_C

Imag Axis (seconds<sup>-1</sup>)

Real Axis (seconds<sup>-1</sup>)

IOTransfer\_r2y: step

Step Response

From: r To: y

Amplitude

Time (seconds)

Open-loop Help improve Control System Designer

# Przykład 2

Dany jest układ z jednostkową pętlą sprzężenia zwrotnego ujemnego. Należy naszkicować linie pierwiastkowe dla układu, w którym w torze głównym jest obiekt o transmitancji operatorowej:

$$G(s) = \frac{K(s + 1)}{s^2(s + 3,6)}$$

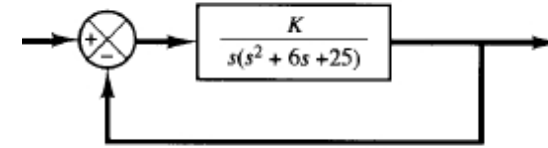
Zakładamy, że wzmacnienie  $K > 0$ .

Transmitancje obiektów w torze głównym oraz pętli sprzężenia zwrotnego są następujące:

$$G(s) = \frac{K(s + 1)}{s^2(s + 3,6)} \quad H(s) = 1$$



# Przykład 3



Rozważmy układ sterowania z ujemną pętlą sprzężenia zwrotnego. Transmitancja operatorowa elementów dynamicznych w torze głównym oraz w pętli sprzężenia zwrotnego są następujące:  $G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 6s + 25)}$ ,  $H(s) = 1$ .

1. Należy naszkicować linie pierwiastkowe, zakładając, że wzmacnienie  $K > 0$ . Wyznaczyć wartości wzmacnienia  $K$ , dla których współczynnik tłumienia biegunów dominujących układu zamkniętego wynosi  $\xi = \frac{1}{\sqrt{17}}$ .
2. Wyznaczyć zakres wartości współczynników wzmacnienia  $K$ , dla których układ będzie stabilny.
3. Określić wartość wzmacnienia krytycznego, przy którym pojawiają się oscylacje o stałej amplitudzie oraz okres tych oscylacji.
4. Wyznaczyć zapas wzmacnienia dla obliczonych biegunów dominujących.





## Przykład 3

Rozważmy następujący przykład transmitancji operatorowej układu otwartego:

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 6s + 25)}$$

1) Warunek kąta:

$$\angle G(s)H(s) = \angle \frac{K}{s(s^2 + 6s + 25)} = -\angle s - \angle (s^2 + 6s + 25) = \mp 180^\circ(2k + 1) \text{ dla } k=0,1,2,3..$$

2) Warunek modułu:

$$|G(s)H(s)| = \left| \frac{K}{s(s^2 + 6s + 25)} \right| = \left| \frac{K}{s(s - (-3 + j4))(s - (-3 - j4))} \right| = 1$$



## Przykład 3. Szkicowanie linii pierwiastkowych

### 1) *Należy ustalić położenie biegunów i zer transmitancji układu otwartego $G(s)H(s)$ .*

Linie pierwiastkowe rozpoczynają się od biegunów  $G(s)H(s)$ , a kończą w zerach  $G(s)H(s)$  (skończonych, bądź w nieskończoności,  $m=0$ ). Wykres linii pierwiastkowych będzie miał  $n=3$  gałęzi. Ponieważ liczba gałęzi wynosi  $n$ , to  $n-m=3$  gałęzi będzie się kończyło w nieskończonych zerach, wzdłuż asymptot. Linie pierwiastkowe są symetryczne względem osi rzeczywistej.

*Na płaszczyźnie zaznaczamy bieguny transmitancji układu otwartego:*

$$s_1 = 0 \text{ oraz } s_2 = -3 + j4 \text{ i } s_3 = -3 - j4$$

### 2) *Określić fragmenty linii pierwiastkowych, które leżą na osi rzeczywistej.*

*Jeśli całkowita liczba zer i biegunów na prawo od punktu testowego jest nieparzysta, to ten punkt należy do linii pierwiastkowej. W naszym przypadku linie pierwiastkowe będą pokrywały się z ujemną częścią osi rzeczywistej ( $\sigma \in (-\infty; 0)$ ).*



## Przykład 3. Szkicowanie linii pierwiastkowych

**3) Wyznaczyć asymptoty linii pierwiastkowych i punkty przecięcia asymptot.** Kąty asymptot względem osi rzeczywistej wyznacza się z następującego wzoru:

$$\alpha = \frac{\mp 180^\circ(2k+1)}{n-m} \text{ dla } k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

$$\alpha = \frac{\mp 180^\circ(2k+1)}{3} = \mp 60^\circ(2k+1) \text{ dla } k = 0, 1, 2, 3 \dots \quad \alpha = \mp 60^\circ, \mp 180^\circ$$

Wszystkie asymptoty przecinają oś rzeczywistą. Miejsce przecięcia asymptoty z osią rzeczywistą wyznaczamy z zależności:

$$\sigma_\alpha = \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)}{n-m} = \frac{0 - 3 + j4 - 3 - j4}{3} = -2$$

Lub:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sum \text{biegunów} - \sum \text{zer}}{n-m}$$



### Przykład 3. Szkicowanie linii pierwiastkowych

**4) Punkty rozgałęzień.** Punkty rozgałęzień odpowiadają pierwiastkom wielokrotnym równania charakterystycznego. Wyznaczamy równanie charakterystyczne ( $1 + G(s)H(s) = 0$ ):

$$\begin{aligned}\frac{K}{s(s^2 + 6s + 25)} + 1 &= 0 \\ K &= -s(s^2 + 6s + 25) = -s^3 - 6s^2 - 25s \\ \frac{dK}{ds} &= -3s^2 - 12s - 25 = 0 \\ s_1 &= -2 + j2.0817 \quad \vee \quad s_2 = -2 - j2.0817\end{aligned}$$

Punkty rozgałęzień mogą być wyznaczone z następującej równości: Odrzucamy  $s_1$  i  $s_2$  z rozważań, gdyż punkty rozgałęzień wyszły zespolone. Możemy jeszcze sprawdzić, że **nie są to punkty rozgałęzień**, licząc wzmocnienie:

$$K = -s(s^2 + 6s + 25)|_{s=-2+j2.0817} = 34 + j18.04$$

$$K = -s(s^2 + 6s + 25)|_{s=-2-j2.0817} = 34 - j18.04$$

Dla rzeczywistych punktów rozgałęzienia, wartość  $K$  musi być rzeczywista, dodatnia ( $K \in \mathbf{R} \wedge K > 0$ ).

**5) Kąt wyjścia i wejścia.**

Kąt wyjścia z bieguna wyznaczamy z następującej równości:

$$\vartheta_d = 180^\circ - \sum \text{kątów od innych biegunów} + \sum \text{kątów od zer}$$

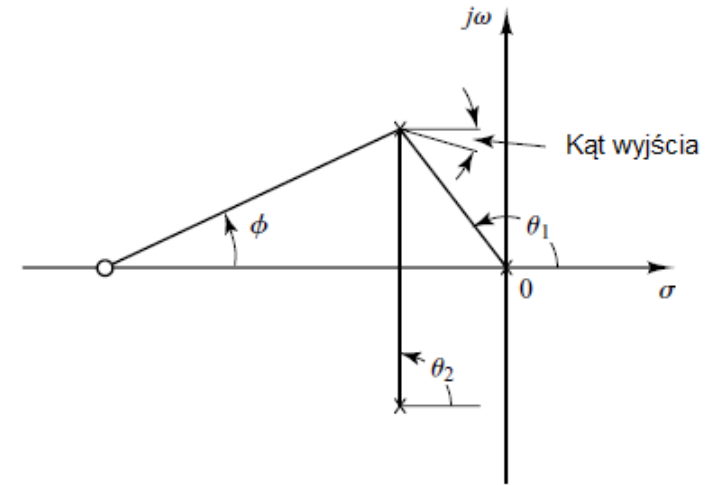
Kąt wejścia do zera wyznaczamy z następującej równości:

$$\Theta_a = 180^\circ - \sum \text{kątów od innych zer} + \sum \text{kątów od biegunów}$$

Przykładowy kąt wyjścia zaznaczono na rysunku.

Kąt wyjścia z bieguna wyznaczamy z następującej równości:

$$\theta_d = 180^\circ - 126.87^\circ - 90^\circ = -36.87^\circ$$





## Przykład 3. Szkicowanie linii pierwiastkowych

**6) Punkty przecięcia z osią urojoną.** Punkty przecięcia z osią urojoną znajdujemy poprzez zastosowanie kryterium Routha-Hurwitza, bądź poprzez wstawienie wartości  $s = j\omega$  do równania charakterystycznego i rozwiązaniu go względem  $K$  i  $\omega$ .

$$(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 25j\omega + K = 0$$

$$(K - 6\omega^2) + j\omega(25 - \omega^2) = 0$$

$$K - 6\omega^2 = 0 \quad \text{i} \quad \omega(25 - \omega^2) = 0$$

$$\omega = 0, \quad K = 0 \quad \text{lub} \quad \omega = \pm 5, \quad K = 150$$

Częstości, przy których linie pierwiastkowe przecinają oś urojoną wynoszą  $\omega = \pm 5$  rad/sek, a wzmocnienie w tych punktach wynosi  $K_{kr} = 150$ . Okres oscylacji wynosi:

$$T_{osc} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} = 1.2566 \text{sek}$$

Punkty przecięcia z osią urojoną możemy alternatywnie znaleźć poprzez zastosowanie kryterium Routha-Hurwitza.



## Przykład 3. Szkicowanie linii pierwiastkowych

### 7) Określenie biegunów dominujących układu zamkniętego.

Bieguny dominujące układu zamkniętego, dla których współczynniki tłumienia  $\xi = \frac{1}{\sqrt{17}}$  leżą na prostych o kącie nachylenia (do osi urojonej):

$$\theta = \pm \arcsin \xi = \pm \arcsin 0.2425 \approx \pm 14^\circ$$

Z rysunku odczytujemy, że linia stałego współczynnika tłumienia przecina linie pierwiastkowe w punktach:

$$s_1 = -1 + j4, \quad s_2 = -1 - j4$$

Wartość współczynnika wzmocnienia, która zapewnia  $\xi = \frac{1}{\sqrt{17}}$  wyznaczamy z warunku modułu:  
amplitudy:

$$K = |s(s^2 + 6s + 25)|_{s=-1+j4} = 68$$



### 7) Określenie biegunów dominujących układu zamkniętego.

Bieguny dominujące układu zamkniętego, dla których współczynniki tłumienia  $\xi = \frac{1}{\sqrt{17}}$  leżą na prostych o kącie nachylenia (do osi urojonej):

Dwa pierwiastki równania charakterystycznego, dla których  $\xi = \frac{1}{\sqrt{17}}$  zostały wyznaczone. Trzeci pierwiastek wyznaczmy z równania charakterystycznego, biorąc  $K = 68$ . Jest to  $s = -4$ . Warto zwrócić uwagę, że współczynnik wzmocnienia dla dowolnego punktu testowego na liniach pierwiastkowych może być wyznaczony z warunku amplitudy

$$K = |s(s^2 + 6s + 25)|_{s=\text{punkt\_testowy}}$$

Zapas wzmocnienia wynosi:

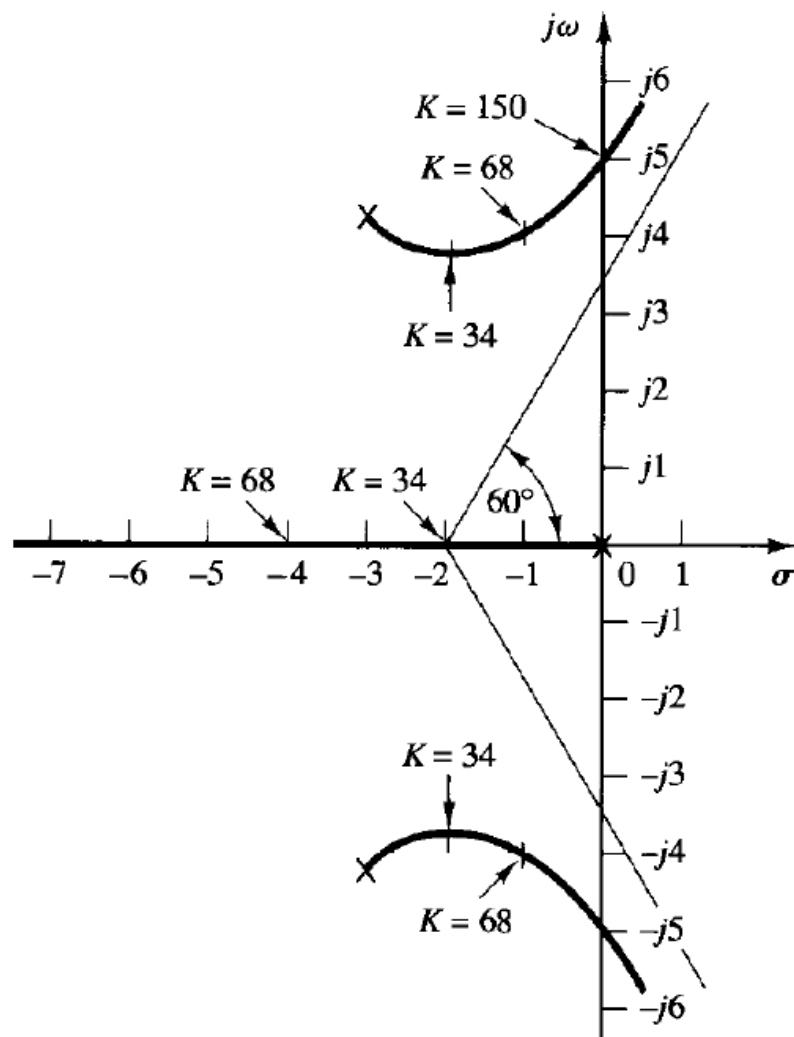
$$\Delta K = \frac{K_{kr}}{K} = \frac{150}{68} = 2.2059$$

$$\Delta K_{dB} = 20 \log \Delta K = 15.8226 \text{ dB}$$

Można rozważyć również zmianę położenia pierwiastków równania charakterystycznego (biegunów układu zamkniętego), gdy współczynnik wzmocnienia jest zwiększany, np. od  $K = 34$  do  $K = 68$ . W tej sytuacji, sprzężone pierwiastki zmieniają położenie z  $s = -2 \pm j3.65$  do  $s = -1 \pm j4$ , a trzeci biegun zmienia wtedy lokalizację z  $s = -2$  do  $s = -4$ .

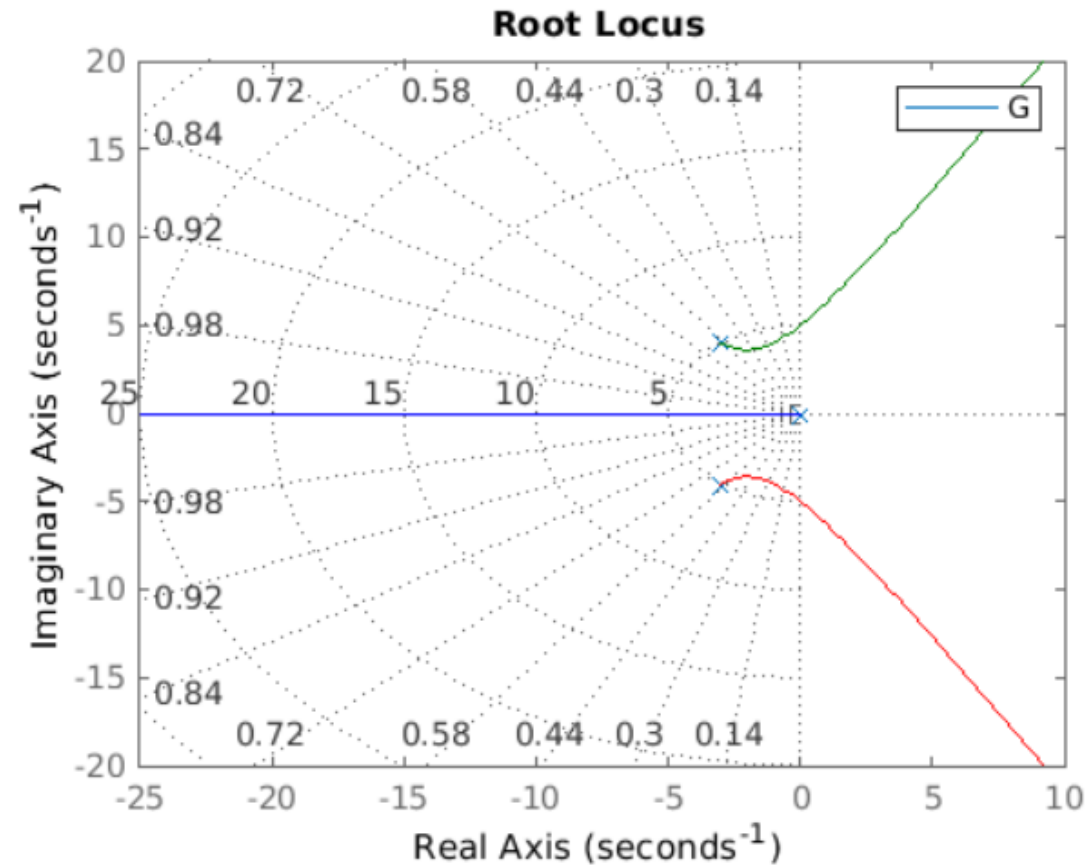


# MATLAB – Przykład 3 – Linie pierwiastkowe



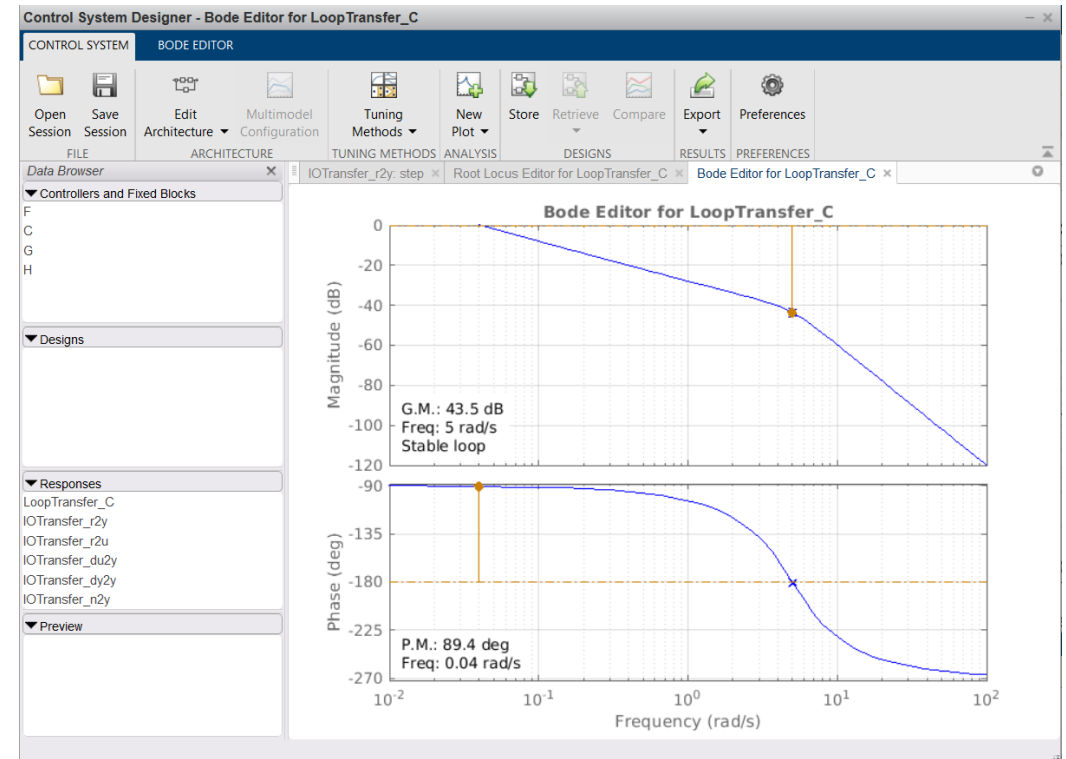
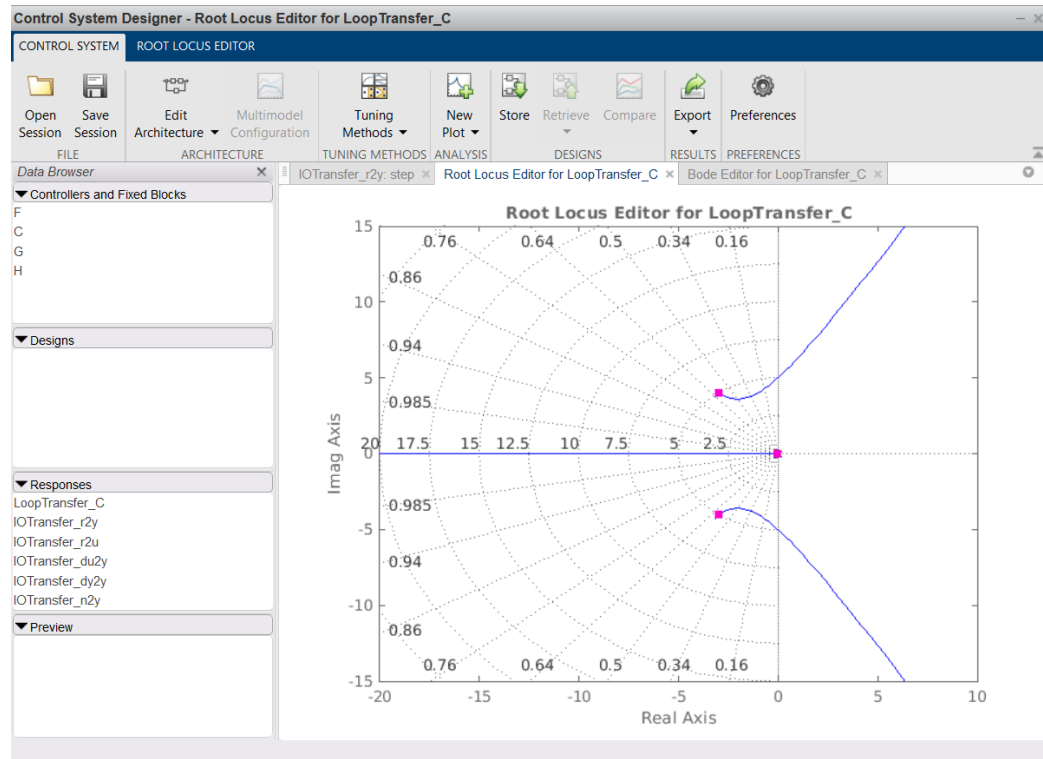


# MATLAB – Przykład 3 – rlocus(G)



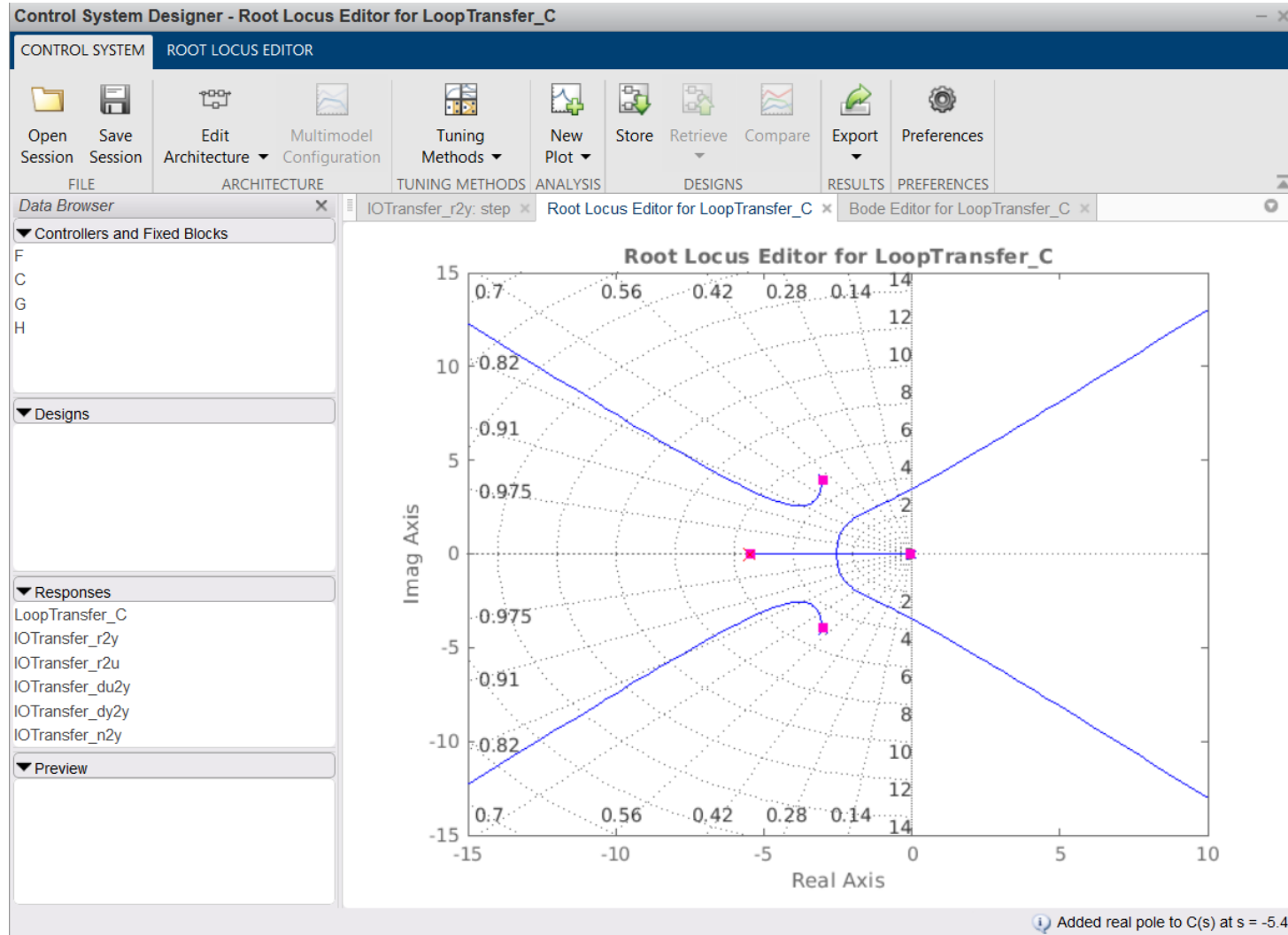


# MATLAB – Przykład 3 – sisotool(G)



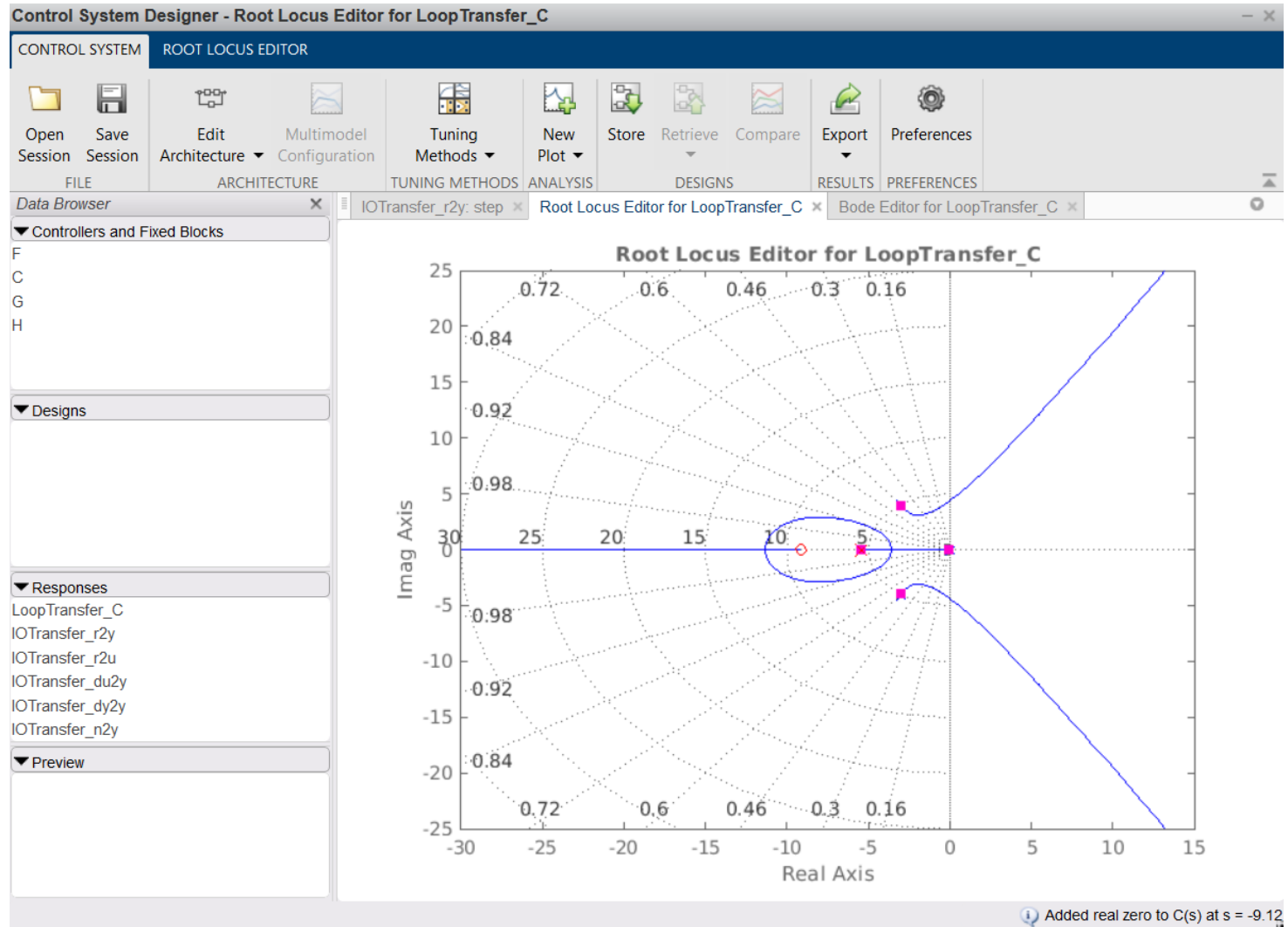


# MATLAB – Przykład 3 – sisotool(G), dodanie bieguna rzeczywistego



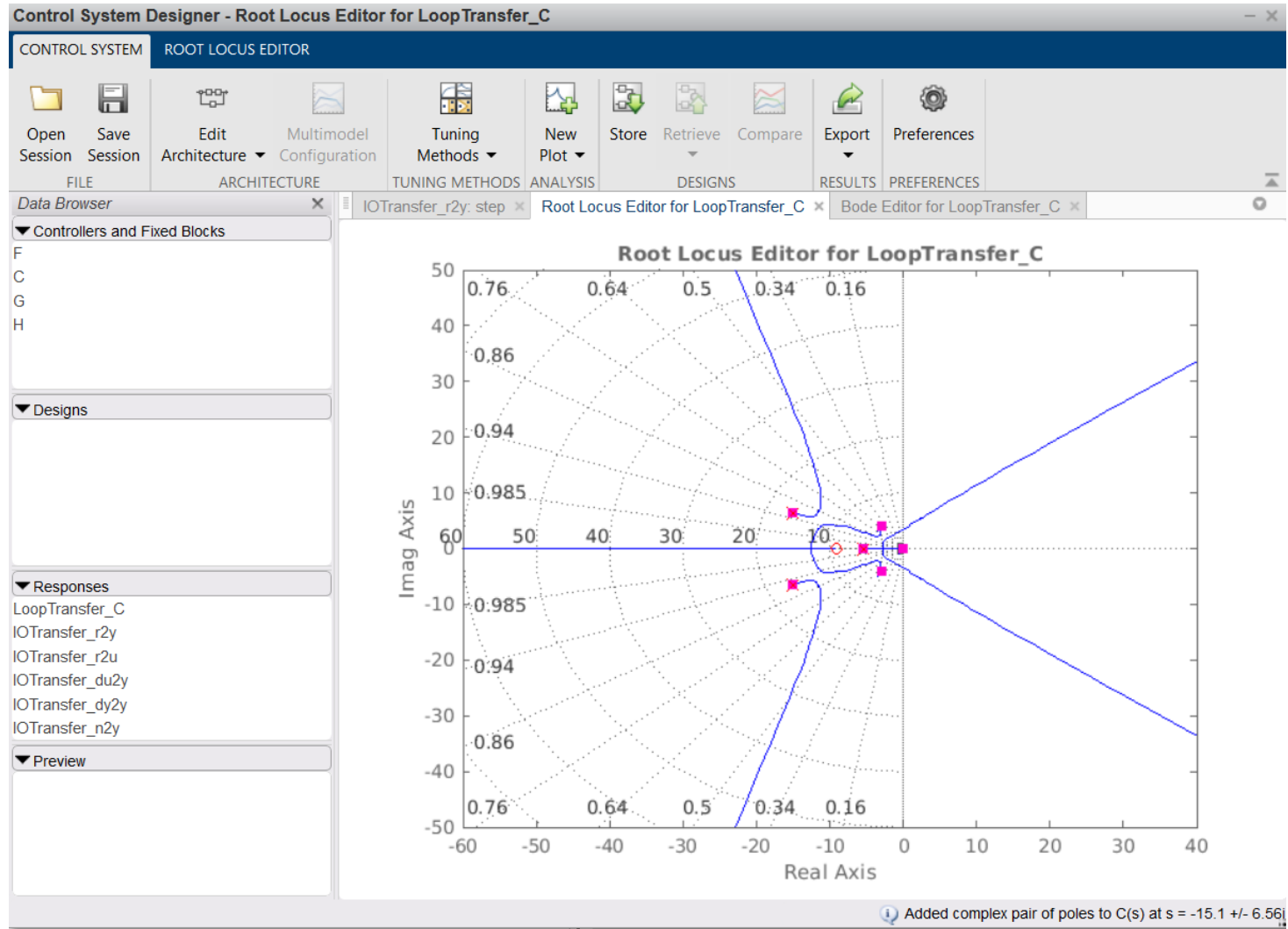


# MATLAB – Przykład 3 – sisotool(G), dodanie zera rzeczywistego





# MATLAB – Przykład 3 – sisotool(G), dodanie pary sprzężonych biegunów



# Przykład 4

Dany jest układ z ujemną, jednostkową pętlą sprzężenia zwrotnego. W torze głównym znajduje się element dynamiczny o transmitancji operatorowej:

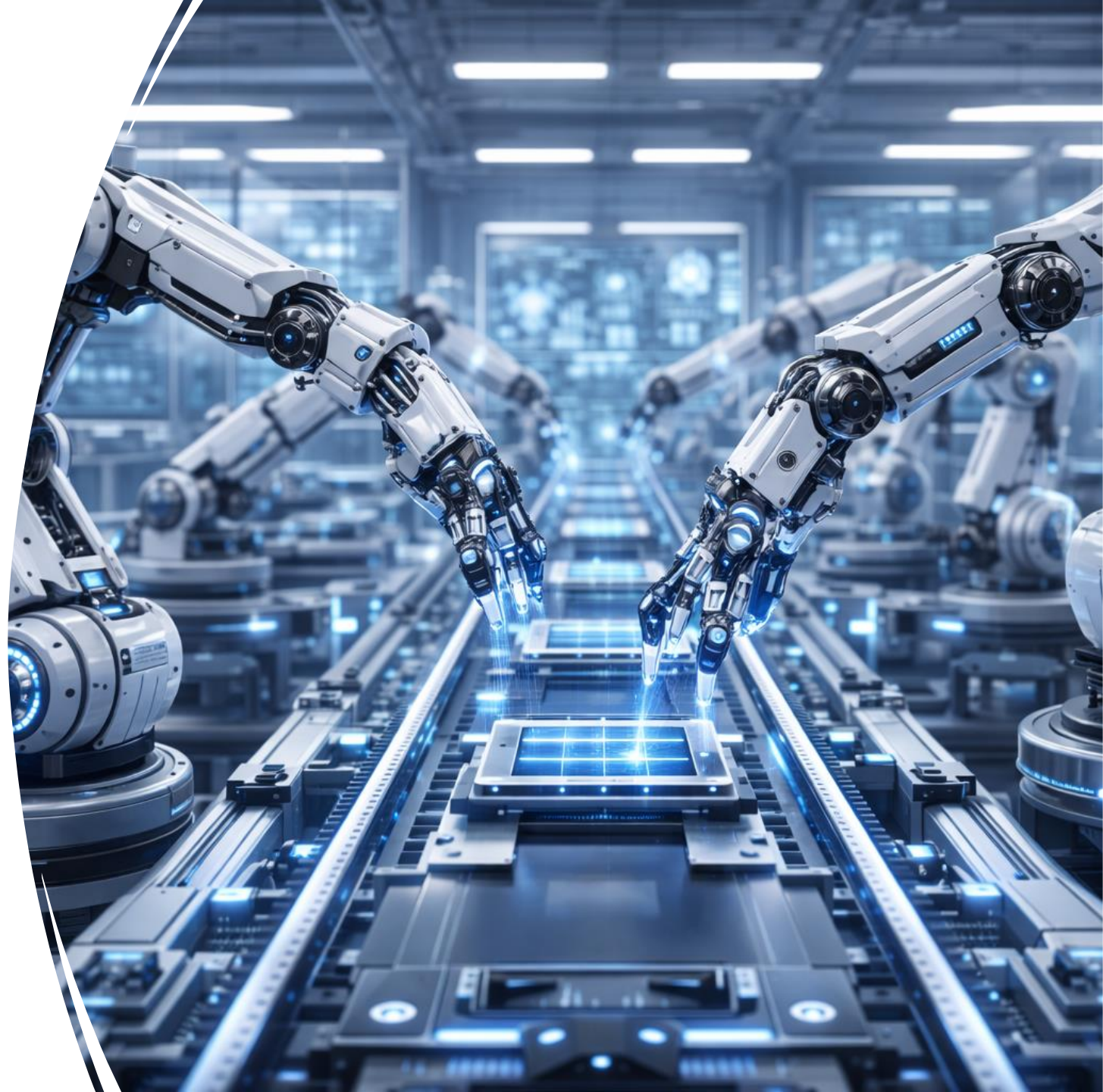
$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

1. Należy naszkicować linie pierwiastkowe, zakładając, że wzmacnienie  $K > 0$ . Wyznaczyć wartości wzmacnienia  $K$ , dla których współczynnik tłumienia biegunów dominujących układu zamkniętego wynosi  $\xi = 0,5$ .
2. Wyznaczyć zakres wartości współczynników wzmacnienia  $K$ , dla których układ będzie stabilny.
3. Określić wartość wzmacnienia krytycznego, przy którym pojawiają się oscylacje o stałej amplitudzie oraz okres tych oscylacji.
4. Wyznaczyć zapas wzmacnienia dla obliczonych biegunów dominujących.



# Podsumowanie

- ✓ **Metoda linii pierwiastkowych** jest klasycznym narzędziem projektowania kompensatorów/regulatorów, opartym na analizie zmian położenia biegunów układu zamkniętego w funkcji wzmocnienia lub innych parametrów układu.
- ✓ **Metoda linii pierwiastkowych** umożliwia **wizualizację dynamiki układu** – stanowi graficzną reprezentację wpływu zmian wartości wybranego parametru na zachowanie układu.
- ✓ Bieguny układu zamkniętego przemieszczają się od biegunów układu otwartego do jego zer w funkcji wzmocnienia  $K$ .
- ✓ Metoda umożliwia badanie stabilności układu.



# Podsumowanie

- ✓ Naszkicowanie linii pierwiastkowych układu przed oraz po kompensacji pozwala przeprowadzić **analizę wpływu** wartości parametrów kompensatorów na położenie biegunów dominujących, determinujących najważniejsze własności układu.
- ✓ **Metoda linii pierwiastkowych** pozwala **dobrać odpowiedni kompensator/ regulator do konkretnego celu** projektowego, żeby zapewnić pożądane własności układów.
- ✓ **Metoda linii pierwiastkowych** umożliwia świadome **kształtowanie charakterystyk** układów regulacji w różnorodnych zastosowaniach przemysłowych, od prostych regulatorów temperatury po zaawansowane systemy sterowania robotami czy dronami.



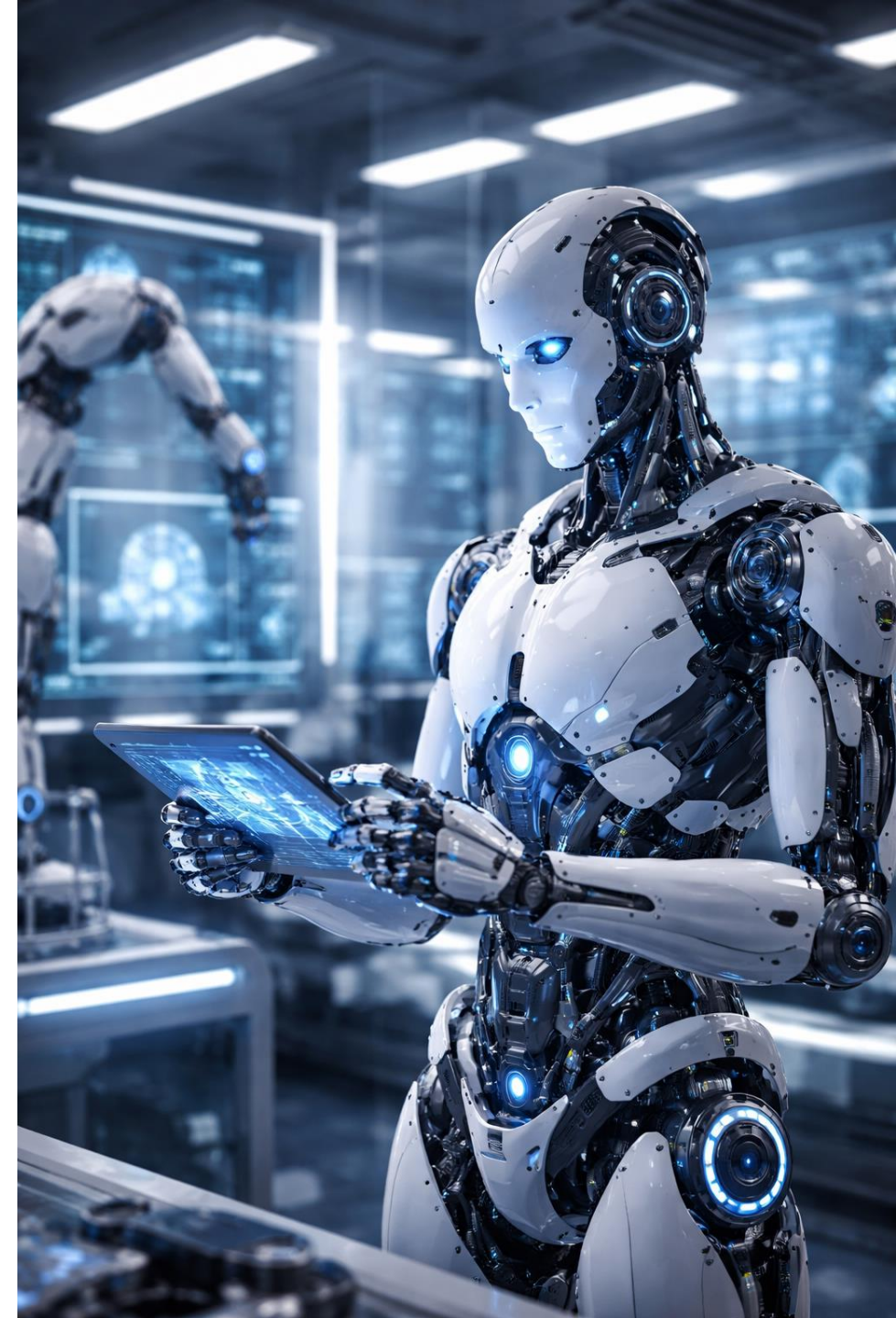
# Spis Piśmiennictwa

- [1] W. R. Evans, "Control system synthesis by root locus method," *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. 69, no. 1, pp. 66–69, 1950.
- [2] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 5th ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 2010.
- [3] N. S. Nise, *Control Systems Engineering*, 7th ed. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2015.
- [4] R. C. Dorf and R. H. Bishop, *Modern Control Systems*, 13th ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Pearson, 2016.
- [5] B. C. Kuo and F. Golnaraghi, *Automatic Control Systems*, 9th ed. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2014.
- [6] J. J. D'Azzo and C. H. Houpis, *Linear Control System Analysis and Design with MATLAB*, 5th ed. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2003.
- [7] G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 7th ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Pearson, 2015.
- [8] K. J. Åström and R. M. Murray, *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 2008.
- [9] B. Friedland, *Control System Design: An Introduction to State-Space Methods*. Mineola, NY, USA: Dover, 2012.



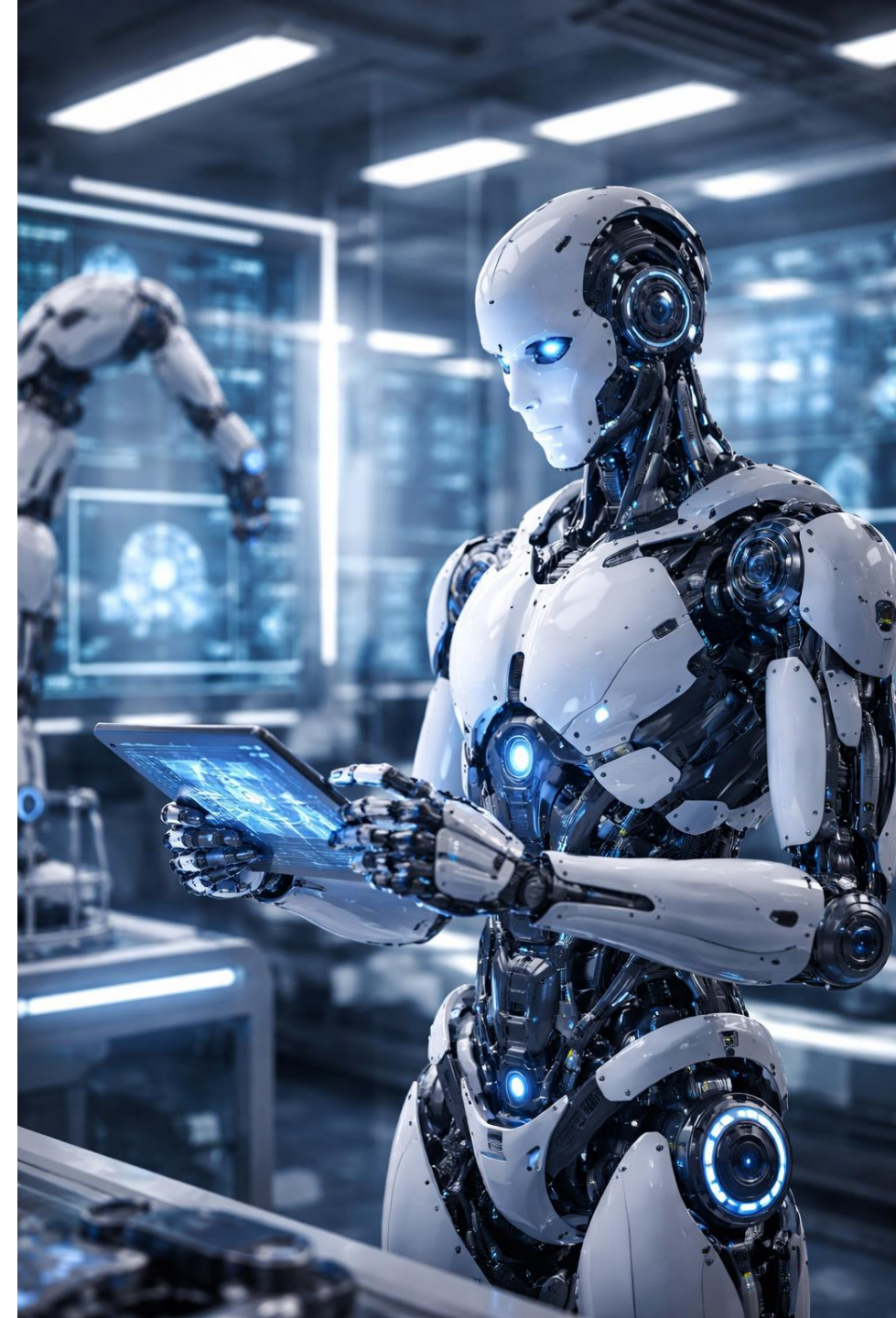
# Artykuły naukowe

- [10] W. Yang, "Design and analysis of root locus based controllers," *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, vol. 1261, no. 1, 2023.
- [11] J. Bendtsen, J. Stoustrup, and P. Andersen, "A root-locus design methodology derived from impedance-based stability analysis," in *Proc. IEEE ECCE Europe*, 2016, pp. 1–8.
- [12] M. N. Spanos and R. Lozano, "A revision of the root locus method and its application to time-delay systems," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 39, no. 20, pp. 6145–6160, 2015.
- [13] J. Chiasson, "A method for computing the root locus of time-delay systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, no. 1, pp. 136–140, 1993.
- [14] S. Gumussoy and W. Michiels, "Computation of the root locus for SISO systems with time delays," *Automatica*, vol. 47, no. 6, pp. 1238–1245, 2011.
- [15] A. B. Özgüler, "Root locus analysis of infinite-dimensional systems," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 44, no. 1, pp. 312–335, 2005.
- [16] U. Münz, F. Allgöwer, and M. Zellner, "Internal model control and root locus design for nonlinear systems," *Automatica*, vol. 46, no. 7, pp. 1239–1245, 2010.
- [17] H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*. New York, NY, USA: Wiley-Interscience, 1972.



# Zastosowania i kierunki rozwoju

- [18] R. H. Middleton and G. C. Goodwin, "Digital control and estimation: A unified approach," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, no. 6, pp. 702–704, 1990.
- [19] P. Kundur, *Power System Stability and Control*. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 1994.
- [20] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice Hall, 1993.
- [21] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover, *Robust and Optimal Control*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 1996.
- [22] S. Skogestad and I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, 2nd ed. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2005.
- [23] J. Lunze, *Feedback Control of Large-Scale Systems*. London, U.K.: Prentice Hall, 1992.
- [24] Y. Yamamoto, "A function space approach to root locus of distributed parameter systems," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 39, no. 5, pp. 1408–1422, 2001.
- [25] J. Chen and G. Gu, *Control-Oriented System Identification: An  $H^\infty$  Approach*. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2000.



# Kursy uniwersyteckie

## *Lecture 5: Root Locus – Electronic Feedback Systems*

*Massachusetts Institute of Technology (MIT OpenCourseWare)*

<https://ocw.mit.edu/courses/res-6-010-electronic-feedback-systems-spring-2013/resources/lecture-5-root-locus/>

## *Lecture 6: More Root Locus – Electronic Feedback Systems*

*Massachusetts Institute of Technology (MIT OpenCourseWare)*

<https://ocw.mit.edu/courses/res-6-010-electronic-feedback-systems-spring-2013/resources/lecture-6-more-root-locus/>

## *Electronic Feedback Systems – Course Videos (Root Locus module)*

*Massachusetts Institute of Technology (MIT OpenCourseWare)*

[https://ocw.mit.edu/courses/res-6-010-electronic-feedback-systems-spring-2013/video\\_galleries/course-videos/](https://ocw.mit.edu/courses/res-6-010-electronic-feedback-systems-spring-2013/video_galleries/course-videos/)



# Kursy akademickie i eksperckie

*Control Systems, Lecture 11: Root Locus (Part 1)*

*bioMechatronics Lab (kurs akademicki – uczelnia techniczna)*

<https://www.youtube.com/watch?v=JHReFyfaiDE>

*Control Systems Engineering – Lecture 10: Root Locus*

*University of the West of England (UWE Bristol)*

<https://www.youtube.com/watch?v=jejRXTNSFd0>

*The Root Locus Method (Full Playlist)*

*Brian Douglas (Control Theory – poziom ekspercki)*

<https://www.youtube.com/playlist?list=PLUMWjy5jgHK3-ca6GP6PL0AgcNGHqn33f>

*More Root Locus – MIT Lecture*

*Massachusetts Institute of Technology (MIT OpenCourseWare)*

<https://www.youtube.com/watch?v=NRIBCoVIJBM>





Dziękuję  
za uwagę

dr inż. Edyta Rola